

4º ESO – Algebra

Unidad 4: Inecuaciones

1. Inecuaciones
2. Inecuaciones- Una variable - Grado 1 - (Tarea 1)
3. Inecuaciones – Una variable - Grado 2 - (Tarea 2)
4. Inecuaciones – Una variable - Grado > 2 - (Tareas 3 y 4)
5. Inecuaciones racionales - Una variable- (Tarea 5)
6. Inecuaciones – 2 variables - Grado 1 - (Tarea 6)
7. Sistemas lineales de inecuaciones – Una variable – Grado 1 – (Tarea 7)
8. Sistemas lineales de inecuaciones – Dos variables – Grado 1 – (Tarea 8)

1. INECUACIONES

Una **inecuación** es una *desigualdad entre dos expresiones algebraicas*. La clase de expresiones (grado y número de variables) define el tipo de inecuación.

Una **inecuación** es una desigualdad que se compone de dos expresiones algebraicas separadas por los signos: $<$, $>$, \leq o \geq .

Resolver una inecuación es buscar los valores de la variable que satisfacen la desigualdad.

Propiedades de las inecuaciones

En la resolución de una inecuación debemos tener en cuenta que:

- Al sumar o restar en ambos miembros de la inecuación la misma cantidad, la desigualdad no varía.

$$5x + 2 \leq 10 \rightarrow 5x + 2 - 2 \leq 10 - 2 \rightarrow 5x \leq 8$$

- Al multiplicar o dividir ambos miembros de la inecuación por un mismo número positivo, la desigualdad no varía.

$$5x + 5 \leq 20 \rightarrow \frac{5x + 5}{5} \leq \frac{20}{5} \rightarrow x + 1 \leq 4$$

- Al multiplicar o dividir ambos miembros de la inecuación por un mismo número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.

$$-5x + 5 \leq 20 \rightarrow \frac{-5x + 5}{-5} \geq \frac{20}{-5} \rightarrow x - 1 \geq -4$$

Resolución de inecuaciones con una incógnita

Para resolver inecuaciones con una incógnita observamos el grado:

- Si es de grado 1 aplicamos las propiedades de las inecuaciones.
- Si es de grado mayor que 1 operamos hasta dejar la expresión algebraica en un miembro y en el otro, cero. Después se resuelve como si fuera una ecuación y su solución se determina mediante tanteo

En ambos casos la solución se expresa en forma de intervalos.

2. INECUACIONES – UNA VARIABLE - GRADO 1

Veamos un *ejemplo de una inecuación de primer grado con una incógnita*:

EJEMPLO

13 Resuelve las inecuaciones.

a) $2x - 3 \geq 3x + 2$

Como es de grado 1, aplicamos las propiedades de las inecuaciones. Con la propiedad aditiva agrupamos los números en un miembro de la inecuación y las incógnitas en el otro.

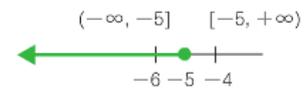
$$2x - 3x \geq 2 + 3 \rightarrow -x \geq 5$$

Con la propiedad de la multiplicación despejamos la incógnita. Como -1 es negativo, al multiplicar la desigualdad cambia de signo:

$$-x \cdot (-1) \leq 5 \cdot (-1) \rightarrow x \leq -5$$

Expresamos la solución como intervalo:

$$x \leq -5 \rightarrow \text{La solución es el intervalo } (-\infty, -5].$$



Tarea 1 – Inecuaciones – Una variable -Grado 1

3. INECUACIONES – UNA VARIABLE - GRADO 2

b) $x^2 - 3 < 3x + 1$

Como es de grado 2, agrupamos la expresión algebraica en un miembro:

$$x^2 - 3 - 3x - 1 < 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$$

Resolvemos la ecuación: $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

La solución es alguno de estos intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 4)$ o $(4, +\infty)$.

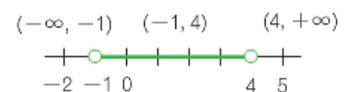
Tomamos un punto de cada uno y comprobamos si es solución.

Si $x = -2 \rightarrow (-2)^2 - 3 < 3 \cdot (-2) + 1 \rightarrow 1 < -5$. No es solución.

Si $x = 0 \rightarrow 0^2 - 3 < 3 \cdot 0 + 1 \rightarrow -3 < 1$. Es solución.

Si $x = 5 \rightarrow 5^2 - 3 < 3 \cdot 5 + 1 \rightarrow 22 < 16$. No es solución.

La solución es el intervalo $(-1, 4)$.



Tarea 2 – Inecuaciones – Una variable-Grado 2

4. INECUACIONES – UNA VARIABLE – GRADO > 2

Veamos el procedimiento con un *ejemplo*.

$$(x-1)^3(x+1)^2(2x-1) \geq 0$$

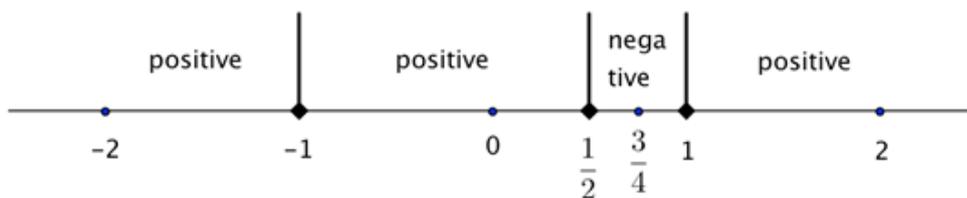
$$p(x) = (x-1)^3(x+1)^2(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^3 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$p(-2) = (-2-1)^3(-2+1)^2(2 \cdot (-2)-1) = 135 > 0$$

$$p(0) = (0-1)^3(0+1)^2(2 \cdot 0-1) = 1 > 0$$

$$p\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}-1\right)^3\left(\frac{3}{4}+1\right)^2\left(2 \cdot \frac{3}{4}-1\right); -0.02 < 0$$

$$p(2) = (2-1)^3(2+1)^2(2 \cdot 2-1) = 27 > 0$$



$$\text{Solution: } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$$

Tareas 3 y 4 – Inecuaciones – Una variable - Grado > 2

5. INECUACIONES RACIONALES – 1 VARIABLE

Veamos el procedimiento en un *ejemplo*:

$$\frac{x^2-1}{x-5} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(x-1)(x+1)}{x-5} < 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ x-5=0 \rightarrow x=5 \end{cases}$$

El número 5 no podrá estar en la solución final en ningún caso porque anula el denominador.

Los números 1 y -1 tampoco podrán estar en la solución final porque la expresión debe ser estrictamente menor que 0 (<0) y no son válidos esos números porque su valor numérico es 0.

$$F(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-5} \rightarrow \begin{cases} F(-2) = \frac{-3 \cdot (-1)}{-7} < 0 \\ F(0) = \frac{(-1) \cdot 1}{-5} > 0 \\ F(3) = \frac{2 \cdot 4}{-2} < 0 \end{cases}$$

Luego la solución es: $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

Tarea 5 – Inecuaciones racionales

6. INECUACIONES – 2 VARIABLES - GRADO 1

Veamos el procedimiento con un *ejemplo*.

¿CÓMO SE RESUELVEN INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS?

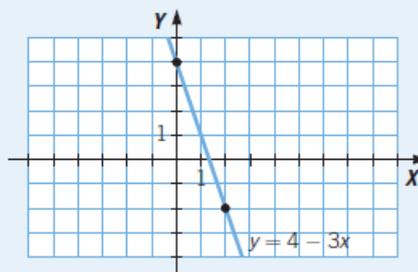
Resuelve la inecuación $3x + y > 4$.

PRIMERO. Se considera la función lineal asociada a la inecuación, sustituyendo el signo $>$ por $=$.

$$3x + y > 4 \rightarrow 3x + y = 4 \rightarrow y = 4 - 3x$$

SEGUNDO. Se representa gráficamente la función que representa, que será una recta que divide el plano en dos partes.

x	0	2
y	4	-2



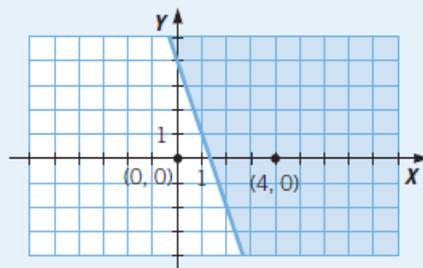
TERCERO. Se elige un punto en cada parte del plano y se comprueba si cumple la inecuación.

Tomamos, por ejemplo, el punto $(4, 0)$:

$$3 \cdot 4 + 0 > 4 \rightarrow \text{Cumple la inecuación.}$$

El punto $(0, 0)$ del otro semiplano:

$$3 \cdot 0 + 0 \ngtr 4 \rightarrow \text{No cumple la inecuación.}$$



Si un punto del semiplano cumple la desigualdad, entonces todos la cumplen.

La solución es el semiplano de la derecha.

Tarea 6 – Inecuaciones – Dos variables - Grado 1

7. SISTEMAS LINEALES DE INECUACIONES – UNA VARIABLE – GRADO 1

Un **sistema de inecuaciones** es un conjunto de inecuaciones del que se quiere calcular una solución común.

Para encontrar su solución se resuelve por separado cada una de las inecuaciones y luego se toman las soluciones comunes.

Veamos el procedimiento con un *ejemplo*.

EJEMPLO

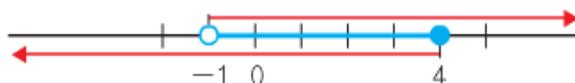
10 Resuelve este sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - 3 \leq 1 \\ 2x + 4 > 2 \end{array} \right\}$$

Operamos en las inecuaciones para dejar la incógnita en un miembro, y los números, en el otro:

$$\begin{aligned} x - 3 \leq 1 &\rightarrow x \leq 1 + 3 \rightarrow x \leq 4 \\ 2x + 4 > 2 &\rightarrow 2x > 2 - 4 \rightarrow x > -\frac{2}{2} \rightarrow x > -1 \end{aligned}$$

Después de resolver las dos inecuaciones, representamos sobre una recta real los intervalos que son solución de cada inecuación, y elegimos el intervalo que cumple las dos inecuaciones a la vez.



Por tanto, los valores que cumplen las dos inecuaciones a la vez son los valores comprendidos en el intervalo $(-1, 4]$.

Para comprobar la solución tomamos un valor de x de este intervalo; por ejemplo, $x = 0$, y vemos si se cumplen las dos inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x - 3 \leq 1 \\ 2x + 4 > 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{x=0} \left. \begin{array}{l} 0 - 3 \leq 1 \\ 2 \cdot 0 + 4 > 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Se cumplen las dos inecuaciones.}$$

Así, la solución del sistema es el intervalo $(-1, 4]$.

Tarea 7 – Sistemas lineales de ecuaciones-Una variable-Grado 1

8. SISTEMA LINEAL DE INECUACIONES – DOS VARIABLES - GRADO 1

¿CÓMO SE RESUELVEN SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS?

55. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones con dos incógnitas:

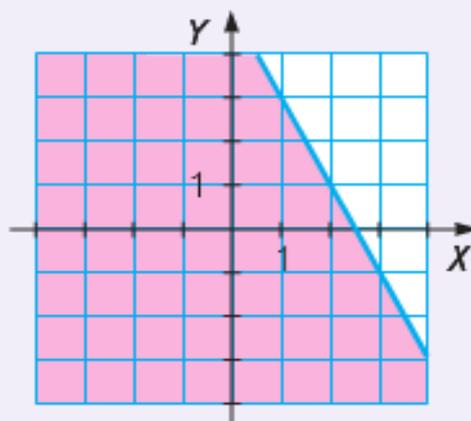
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 6 \end{array} \right\}$$

PRIMERO. Se resuelve cada una de las inecuaciones por separado; para ello se representa gráficamente su solución en el plano de manera independiente.

$$2x + y \leq 5 \rightarrow 2x + y = 5 \rightarrow y = 5 - 2x$$

Recta que pasa por los puntos:

x	1	2
y	3	1



$$2x + 3y \leq 6 \rightarrow 2x + 3y = 6 \rightarrow y = \frac{6 - 2x}{3}$$

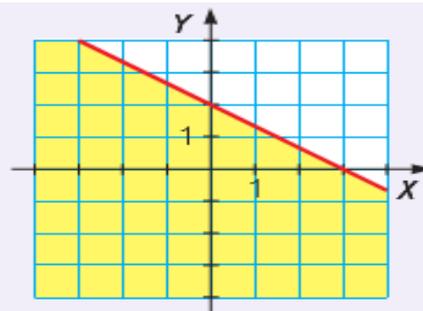
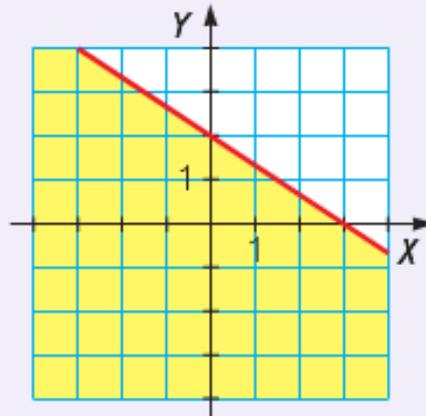
Recta que pasa por los puntos:

x	0	3
y	2	0

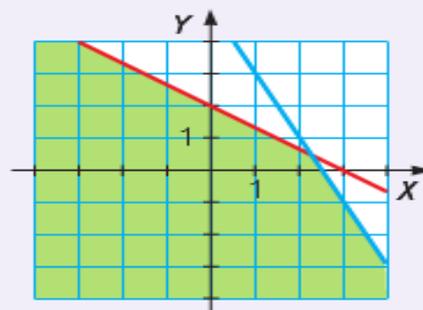
$$2x + 3y \leq 6 \rightarrow 2x + 3y = 6 \rightarrow y = \frac{6 - 2x}{3}$$

Recta que pasa por los puntos:

x	0	3
y	2	0



SEGUNDO. Se representan sobre los mismos ejes las soluciones de ambas inecuaciones, y se elige como solución del sistema la región del plano común a ambas.



La parte del plano que queda coloreada es la solución buscada.

Tarea 8 – Sistema lineal de inecuaciones – Dos variables - Grado 1

