4º ESO – Algebra

Unidad 2: Polinomios

1. Introducción
    1.1. Definiciones
    1.2. Operaciones
    1.3. Identidades Notables
2. Regla de Ruffini - *(Tarea 1)*
3. Teorema del resto - *(Tarea 2)*
4. Raíces de un polinomio - *(Tarea 3)*
5. Factorización - *(Tarea 4)*
6. Fracciones algebraicas
    6.1. Simplificación - *(Tarea 5)*
    6.2. Operaciones - *(Tarea 6)*
7. Tareas de repaso - (Tareas 7, 8 y 9)

1. Introducción

1.1. Definiciones

Un **polinomio** es un monomio o la suma o la diferencia de monomios no semejantes.
Cada monomio se llama **término** del polinomio, y el término que no tiene parte literal se denomina **término constante** (*término independiente*).
Grado del polinomio es el mayor grado de los monomios que lo forman.

¡Importante!: Los términos están separados por signos de suma y resta, nunca por productos.

Un polinomio con un sólo término se llama monomio.
Un polinomio con dos términos se llama binomio.
Un polinomio con tres términos se llama trinomio.

El **opuesto** de un polinomio P(x) se obtiene cambiando el signo a todos los términos del polinomio. Se escribe –P(x).

Evaluar un polinomio en un cierto valor o valores deseados es encontrar el **valor numérico** de ese polinomio y se calcula sustituyendo las variables (x, y…) por el /los números que nos interesen.

1.2. Operaciones

Suma y resta

Para sumar o restar polinomios, se suman o restan los términos que sean semejantes.

Multiplicación

Para multiplicar dos polinomios primero multiplicamos cada término de uno de los polinomios por todos los términos del otro polinomio, y después agruparemos los términos semejantes.

División

Dados dos polinomios, P(x) y Q(x), si dividimos P(x) entre Q(x), obtenemos otros dos polinomios, C(x) y R(x), que cumplen:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$\text{Grado de } R(x) < \text{Grado de } Q(x)$$

Los polinomios P(x), Q(x), C(x) y R(x) se denominan *dividendo, divisor, cociente* y *resto* respectivamente.

<u>Ejemplo</u>: Divide $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ entre $Q(x) = 2x^2 - x + 1$

Hallamos el primer término del cociente, dividiendo el término de mayor grado del dividendo entre el de mayor grado del divisor. $4x^3 : 2x^2 = 2x$	$\begin{array}{r\|l} \mathbf{4x^3} + 2x^2 - 4x + 3 & \mathbf{2x^2} - x + 1 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$
Este término lo multiplicamos por cada uno de los términos del divisor, y el resultado lo restamos al dividendo.	$\begin{array}{r\|l} 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -4x^3 + 2x^2 - 2x & 2x \\ \cline{1-1} 4x^2 - 6x + 3 & \end{array}$
Repetimos el proceso hasta que el polinomio del resto tenga grado menor que el divisor.	$\begin{array}{r\|l} 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -4x^3 + 2x^2 - 2x & \underbrace{2x + 2}_{\text{COCIENTE}} \\ \cline{1-1} 4x^2 - 6x + 3 & \\ -\,4x^2 + 2x - 2 & \\ \cline{1-1} -4x + 1 \leftarrow \text{RESTO} & \end{array}$

Para comprobar si está bien hecha la división vemos que se cumple la igualdad $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.

$$\begin{aligned} 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 &= (2x^2 - x + 1) \cdot (2x + 2) + (-4x + 1) = \\ &= 4x^3 + 2x^2 + 2 + (-4x + 1) = \\ &= 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

Potencia

No olvides que una potencia es un producto.

1.3. Identidades Notables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Otras identidades notables que estaría bien que conocieras

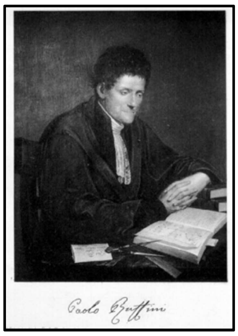
$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 \pm b$

$(a\pm b)^4 = a^4 \pm 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 \pm 4\,a\,b^3 + b^4$

$(a\pm b)^5 = a^5 \pm 5\,a^4\,b + 10\,a^3\,b^2 \pm 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 \pm b^5$

Etc.

2. Regla de Ruffini



La **regla de Ruffini** es un procedimiento para dividir polinomios cuando el divisor es de la forma $(x - a)$, siendo a un número entero.

Fue descrita por el matemático y filósofo italiano Paolo Ruffini in 1809.

EJEMPLO

5 Calcula $(x^3 + 1) : (x - 2)$.

Escribimos los coeficientes de todos los términos del dividendo, desde el de mayor grado al término independiente, añadiendo un cero en el lugar de cada término que falte.

$$x^3 + 1 = 1x^3 + 0x^2 + 0x + 1$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

A la izquierda colocamos el término independiente del divisor, cambiado de signo, y bajamos el primer coeficiente del dividendo.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Después, multiplicamos el primer coeficiente, en este caso 1, por el término independiente del divisor, cambiado de signo: 2, y lo sumamos al siguiente coeficiente.

Repetimos este proceso hasta llegar al último coeficiente.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & & \cdot 2 \nearrow 2 & \cdot 2 \nearrow 4 & \cdot 2 \nearrow 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 9 \end{array}$$

El polinomio cociente es siempre un grado menor que el dividendo.

Los primeros números que aparecen en la última fila corresponden a los coeficientes del polinomio cociente y el último número es el resto.

	1	0	0	1
2		2	4	8
	1	2	4	9

$$\underbrace{1 \quad 2 \quad 4}_{\text{Cociente}} \quad \underbrace{9}_{\text{Resto}}$$

Cociente → $x^2 + 2x + 4$

Para comprobar que la división está bien realizada:

$$\underbrace{P(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x - a)}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{C(x)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{R}_{\text{Resto}} \rightarrow (x^3 + 1) = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4) + 9$$

Tarea 1 – Regla de Ruffini

3. El Teorema del resto

Cuando dividimos un polinomio P(x) por (x-a), sin necesidad de realizar la división, podemos conocer el valor del **resto de esa división** calculando el valor numérico **P(a).**

Teorema del resto

El valor numérico de un polinomio $P(x)$, para $x = a$, coincide con el resto de la división $P(x) : (x - a)$.

Comprobamos este resultado. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x - a)$ obtenemos la siguiente igualdad de polinomios:

$$P(x) = (x - a) \cdot C(x) + R, \text{ donde } R \text{ es un número.}$$

Así, el valor numérico del polinomio $P(x)$, para $x = a$, es:

$$P(a) = \cancel{\underbrace{(a - a)}_{0} \cdot C(a)} + R$$

Es decir, $P(a) = R$, donde R es el resto de la división $P(x) : (x - a)$.

Tarea 2 – Teorema del resto

4. Raíces (ceros) y factores de un polinomio

Las raíces de un polinomio son aquellos valores de la variable que hacen que el valor del polinomio sea cero.

Un número a es **raíz de un polinomio** $P(x)$ si se cumple que $P(a) = 0$.

Por el teorema del resto, a es raíz de $P(x)$ si $P(x)$ es divisible por $(x - a)$.

Teorema del factor

El teorema del factor establece que un polinomio P(x) tiene un factor (x-a) si y solo si P(a)=0, es decir, a es una raíz.

Si ocurre que (x – a) divide a P(x) más de una vez:

- si $(x - a)^2$ divide a P(x) entonces se dice que x=a es una raíz **múltiple** de P(x), en otro caso se dice que x=a es una raíz **simple** de P(x).

Se denomina **multiplicidad** de una raíz "a" al mayor exponente m con el que se cumple que $(x - a)^m$ divide a P(x).

Tarea 3 – Raíces y factores de un polinomio

5. Factorización

5.1 Divisores de un polinomio

Si un polinomio se puede poner como producto de otros dos polinomios, decimos que estos son **factores** o **divisores** del polinomio.

$P(x) = Q(x) \cdot R(x) \rightarrow Q(x)$ y $R(x)$ son factores o divisores de $P(x)$.

No se consideran divisores de un polinomio los divisores que tienen el mismo grado que el polinomio ni los de grado 0, es decir, los números.

$$\underbrace{2x^2 + 4x}_{\text{Grado 2}} = \underbrace{2x \cdot (x + 2)}_{\text{Divisores}} \qquad \underbrace{2x^2 + 4x}_{\text{Grado 2}} = \underbrace{2 \cdot (x^2 + 2x)}_{\text{No divisores}}$$

Si un polinomio no tiene divisores decimos que es **irreducible**.

Para determinar divisores de grado 1 de un polinomio cuyos coeficientes son números enteros utilizamos la regla de Ruffini, tomando como a los divisores del término independiente del polinomio.

EJEMPLO

9 **Calcula un divisor de este polinomio:**

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4$$

El término independiente del polinomio es -4, luego probamos a dividir el polinomio entre $(x - a)$, eligiendo a entre los divisores de -4.

$$\text{Div}\,(-4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

Comenzamos con el valor $a = 1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & & 1 & -1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 4 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow C(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$$

Como el resto es cero, el polinomio $(x - 1)$ es divisor de $P(x)$.

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = (x - 1) \cdot (x^3 - x^2 + 2x + 4)$$

Factorizar un polinomio consiste en escribirlo como producto de polinomios del menor grado posible.

Para factorizar un polinomio utilizamos técnicas como: sacar factor común (cuando todos los términos del polinomio tienen un divisor común), las igualdades notables y la regla de Ruffini.

EJEMPLO

10 **Factoriza estos polinomios.**

a) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ b) $Q(x) = x^4 - 1$

a) Como todos los monomios son múltiplos de x:

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x \underset{\text{Sacamos factor común } x}{=} x \cdot (x^2 - 5x + 6)$$

Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar $x^2 - 5x + 6$.

Término independiente: 6 $\rightarrow$ Div (6) $= \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Si probamos con 1 y -1, el resto no es cero. Probamos con 2:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} \end{array} \longrightarrow C(x) = x - 3$$

Por tanto, tenemos que: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$

Así, resulta: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x = x \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

b) Factorizamos mediante las igualdades notables:

$$Q(x) = x^4 - 1 = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) = (x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

Podemos utilizar también la regla de Ruffini:

Div $(-1) = \{\pm 1\}$ $\rightarrow$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 0 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \rightarrow C(x) = x^2 + 1
\end{array}$$

Como el último polinomio no se puede factorizar, resulta:

$$Q(x) = x^4 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$$

Pasos a seguir para factorizar un polinomio:

Por este orden:

- ✓ Reducir términos semejantes.
- ✓ Sacar factor común a todo lo que se pueda.
- ✓ Identidades o productos notables.
- ✓ Cálculo de raíces:
  - Si es de grado dos, con la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.
  - Si es de grado superior a dos, utilizar la regla de Ruffini las veces que sea necesario..

Tarea 4 – Factorización

6. Fracciones algebraicas

Una fracción algebraica es una fracción cuyo numerador y denominador son polinomios.

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

Las fracciones algebraicas cumplen las mismas leyes que las fracciones numéricas, así que se operan utilizando las mismas reglas.

Fracciones equivalentes

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{m(x)}{n(x)} \Leftrightarrow p(x)\cdot n(x)=q(x)\cdot m(x)$$

Podemos obtener fracciones equivalentes por amplificación o por simplificación.

Simplificación

Simplificamos dividiendo el numerador y el denominador por el mayor factor común que haya entre ellos.

Amplificación

Amplificamos multiplicando el numerador y el denominador por el mismo polinomio.

Suma y resta

Para sumar o restar fracciones algebraicas con distinto denominador, primero reducimos a común denominador, cambiando cada fracción por otra equivalente con ese denominador común. Despúes se operan como siempre, se deja ese denominador común y se suman o se restan los numeradores. Por último, se simplifica el resultado todo lo que se pueda.

Multiplicación y división

$$\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{m(x)}{n(x)}=\frac{p(x)\cdot m(x)}{q(x)\cdot n(x)} \quad , \quad \frac{p(x)}{q(x)}\div\frac{m(x)}{n(x)}=\frac{p(x)\cdot n(x)}{q(x)\cdot m(x)}$$

Tarea 5 – Fracciones algebraicas – Fracciones equivalentes Simplificación

Tarea 6 – Fracciones algebraicas - Operaciones

7. Tareas de repaso

Tarea 7 – Repaso I

Tarea 8 – Repaso II

Tarea 9 – Repaso III