Tema 3

PROBABILIDAD

La palabra *probabilidad* se emplea cotidianamente para mostrar que algo es posible que ocurra. En la rama matemática que es la Estadística, la probabilidad usa un número entre 0 y 1 para medir la posibilidad de que ocurra cada uno de los posibles resultados de un fenómeno aleatorio (al azar).

Experimento aleatorio → Un experimento es aleatorio si es imposible predecir su resultado antes de realizarlo. Un experimento aleatorio compuesto es el que está formado por dos o más experimentos simples. Para realizar recuentos en experimentos compuestos se usan los **diagramas de árbol**, **tablas de doble entrada** y **tablas de contingencia.**

Un ***suceso elemental*** es cada uno de los posibles resultados que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio.

Se llama ***espacio muestral*** (***E***) correspondiente a un experimento aleatorio, al conjunto de todos los sucesos elementales.

SUCESOS

Se llama ***suceso*** (o ***suceso aleatorio***, o ***elemental***) de un experimento aleatorio a cualquier parte del espacio muestral; es decir, es un subconjunto del espacio muestral, *E*.

Un ***suceso seguro*** o ***cierto*** es el compuesto por todos los sucesos elementales, es el propio espacio muestral, *E*.

Un ***suceso imposible*** es el asociado a cualquier resultado imposible en el experimento. Es el que no ocurre nunca, y su probabilidad es cero.

- ### RELACIONES ENTRE SUCESOS

Dos o más sucesos son ***compatibles*** si se pueden verificar a la vez.

Dos o más ***sucesos*** son ***incompatibles*** si no se pueden verificar a la vez.

Dado un suceso C se dice que $\overline{C}$ es el ***suceso contrario*** si se verifica cuando no se verifica C (por ejemplo, par e impar).

Los sucesos C y $\overline{C}$ son incompatibles y cubren todo el espacio muestral; luego:

$$P(C)=1-P(\overline{C}) \rightarrow P(C)+P(\overline{C})=1$$

La **unión de 2 sucesos** *A* y *B*, se designa como $A \cup B$ al suceso formado por todos los elementos de *A* y de *B*; es decir, siempre que ocurre uno ocurre el otro, pero no simultáneamente.

La **intersección de 2 sucesos** A y B, que escribimos como $A \cap B$, es el suceso formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a *A* y a *B*; es decir, el suceso $A \cap B$ sucede cuando lo hacen *A* y *B* a la vez.

PROBABILIDAD

La ***probabilidad*** de un suceso es el número al que se aproxima la frecuencia relativa cuando el experimento se repite un número grande de veces; es un número real comprendido entre *0* y *1*; al multiplicarlo por 100 tenemos la probabilidad en tanto por ciento.

La ***probabilidad elemental*** es la probabilidad asignada a un suceso mediante el cálculo de la frecuencia relativa al repetir el experimento muchas veces ("Ley de los Grandes Números"). Al aumentar el número de veces que repetimos una experiencia aleatoria, el cociente entre el número de veces que se verifica un resultado y el número de repeticiones, se aproxima cada vez más a un determinado valor, que es la ***probabilidad*** de ese resultado.

Dos sucesos son **equiprobables** si tienen la misma probabilidad.

- ### REGLA DE LAPLACE

Esta *Ley de Laplace* da la probabilidad de que se verifique un suceso *A* de un experimento en que los sucesos elementales **son equiprobables**:

$$P(A) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ a\ A}{número\ de\ casos\ posibles}$$

- ### PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD

– La probabilidad de un suceso cierto es 1: P(*suceso seguro*)=P(E)=1

– La probabilidad del suceso imposible es cero: P(Ø)=0

– La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es 1.

– La probabilidad de un suceso elemental *C* que no sea ni cierto ni imposible está entre cero y uno

– La suma de las probabilidades de los sucesos elementales es 1; es decir:

si $E = \{x_1, x_2, x_3, \dots . x_n\}$ entonces $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + \cdots + P(x_n) = 1$

– Dados 2 sucesos A y B mutuamente exclusivos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

– La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de sus sucesos elementales: **REGLA DE LA SUMA**

si $S = \{s_1, s_2 \dots\ s_k\}$ entonces $P(S) = P(s_1) + P(s_2) + \cdots + P(s_n)$

– La suma de las probabilidades de dos sucesos contrarios es 1:

P(*C*)=1-P($\overline{C}$) ó P(*C*)+P($\overline{C}$)=1

– Si A y B son dos eventos, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- **PROBABILIDAD COMPUESTA DE SUCESOS DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES**

Para determinar las probabilidades de los sucesos de experimentos compuestos usamos **la regla del producto** y **la regla de la suma**.

Un experimento es compuesto si está formado por varios (dos o más) experimentos simples.

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **independientes** cuando el resultado de cada una de ellas no depende del resultado de las demás. Por ejemplo, el lanzar un dado y una moneda a la vez.

REGLA DEL PRODUCTO: El número de resultados posibles de un experimento compuesto se obtiene multiplicando los resultados posibles de los experimentos simples que lo componen. Es decir:

$$P(s_1 \; y \; s_2 \; y \; \ldots.) = P(s_1) \cdot P(s_2) \cdot \ldots.$$

Un ejemplo sería el de una urna, con 6 bolas rojas y cinco verdes, y nos preguntan la probabilidad de que si sacamos una sea verde; la volemos a meter en la urna, y que vuelva a salir verde:

$$P(verde \quad verde) = P(verde) \quad P(verde) = \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{11} = \frac{25}{121}$$

Dos sucesos *A* y *B* **son independientes** si ocurre a la vez que:

$$p(A/B) = p(A) \text{ y además: } p(B/A) = p(B)$$

Si dos sucesos *A* y *B* son independientes, entonces: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Dos o más experiencias aleatorias se llaman **dependientes** cuando el resultado de cada una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes. Por ejemplo, sacar dos bolas de una caja, sin reemplazo.

Llamamos **probabilidad condicionada** de un suceso *A* a otro *B*, a la probabilidad de que ocurra A, suponiendo que ha ocurrido B.

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

En estos experimentos compuestos, cada resultado viene dado por un camino del diagrama de árbol.

Un ejemplo sería el de una urna, con 6 bolas rojas y cinco verdes, y nos preguntan la probabilidad de que si sacamos dos, ambas sean verdes:

$$P(verde) \cdot P\left({}^{verde}/_{verde}\right) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 2}{11 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{2}{11}$$

1. Tenemos una urna con 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. Si sacamos 3 bolas de la urna, sin devolución, entonces:

a) Hallar el espacio muestral de este experimento
b) Formar los sucesos (sacar los resultados) de:
   - A = la última bola sacada es roja
   - B = sólo se ha sacado una bola roja
   - C = Se han sacado, al menos, 2 bolas rojas
   - D = No se han sacado dos bolas seguidas del mismo color

2. Lanzamos una moneda al aire. ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara, y de sacar cruz?

Si en vez de una moneda, es una chincheta, responder a las mismas preguntas.

3. Se lanza un dado cúbico, con caras numeradas del 1 al 6, y otro dodecaédrico, con caras numeradas del 1 al 12. Si lanzamos los dados al aire:

¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en cada una de ellos?

¿Y de que salga un 1 en los dos dados?

4. Vamos a comer a un restaurante; en el menú del día, como primer plato tenemos sopa (S) y ensalada (E); de segundo plato, pasta (P), trucha (T) y filete (F); y de postre, natillas (N), helado (H) y café (C).

Hacer un diagrama de árbol con todas las posibilidades.

¿Cuántas combinaciones posibles hay?

5. Lanzamos un dado cúbico (6 caras), numeradas del 1 al 6, y observamos la puntuación obtenida.

- Escribe el espacio muestral
- Escribe los siguientes sucesos:
  - A = “obtener número par”
  - B = “obtener más de 3”
  - C= “obtener menos de 3”
  - D = “obtener más de 8”
  - E = “obtener menos de 8”
- ¿Qué sucesos es más probable, el B o el C?
- ¿Cuál de los anteriores es un suceso imposible?
- ¿Cuál de los anteriores es un suceso seguro?

6. Calcula la probabilidad de obtener un número mayor que 2 al lanzar un dado cúbico correcto con sus caras numeradas de 1 a 6.

7. En una bolsa hay bolas iguales de tres colores: 3 blancas, 4 verdes y 5 rojas; si se saca una bola y se mira el color, halla la probabilidad de que:

- Sea blanca
- Sea verde
- Sea roja
- No sea verde

8. Si lanzamos simultáneamente 2 monedas al aire, calcula la probabilidad de:
- Sacar dos caras
- Sacar dos cruces
- Sacar cara en una moneda y cruz en la otra

9. Una caja contiene 10 bolas, 7 blancas y 3 negras. Si se sacan 2 bolas al azar, escribe el espacio muestral y calcula la probabilidad de:
- Los dos sean del mismo color, con reemplazamiento (se devuelve a la caja la bola que hemos sacado)
- Las dos sean del mismo color, sin reemplazamiento (no devolvemos a la caja la que hemos sacado)

10. Se extrae una bola de urna que tiene 4 bolas verdes, 5 blancas y 5 negras; halla la probabilidad de que al sacar una bola:
- Sea verde o blanca
- No sea blanca

11. Ana y Miguel, dos alumnos de 3º de la ESO, tienen respectivamente 1/2 y 1/5 de probabilidades de suspender un examen de Lengua. La probabilidad de que ambos suspendan simultáneamente el examen es de un 1/10. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos suspenda el examen?

12. Lanzamos simultáneamente dos dados cúbicos; calcula la probabilidad de:
- Dos unos
- Dos números distintos de uno

13. Lanzamos al aire una moneda tres veces seguidas; calcula la probabilidad de:
- Sacar tres cruces *(+)*
- Dos caras *(c)*

14. Se ha probado experimentalmente que la probabilidad de que una moneda trucada caiga *cara* es 0,35. Si lanzamos simultáneamente dos monedas trucadas de este tipo, ¿cuál es la probabilidad de que, al menos una de ellas, caiga *cara*?

15. En un partido de fútbol, a un equipo le pitan 2 penaltis en contra. Los va a tirar el mismo delantero del equipo contrario, cuya probabilidad de meter gol es 0,8 (es decir, mete 8 penaltis de cada 10 que tira).
- Halla la probabilidad de que meta, al menos, un gol
- ¿Cuál es la probabilidad de que falle los dos penaltis?

16. Se lanzan al aire 4 monedas iguales. Calcula la probabilidad de:
- Sacar 4 caras
- No sacar ninguna cara

17. Acuden a una cena 28 hombres y 32 mujeres; de postre, han comido flan 16 hombres y 20 mujeres; el resto han comido tarta. Si elegimos al azar uno de los comensales, calcula la probabilidad de que:
- sea hombre
- haya comido tarta
- sea hombre y haya comido flan

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS

1. Tenemos una urna con 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. Si sacamos 3 bolas de la urna, sin devolución, entonces:

a) Hallar el espacio muestral de este experimento
b) Formar los sucesos (sacar los resultados) de:
   - A = la última bola sacada es roja
   - B = sólo se ha sacado una bola roja
   - C = Se han sacado, al menos, 2 bolas rojas
   - D = No se han sacado dos bolas seguidas del mismo color

SOLUCIÓN:

a) E = {RRR, RRV, RVR, VRR, RVV, VRV, VVR}

b) Los resultados son:

A = {RRR, RVR, VRR, VVR}

B = {RVV, VRV, VVR}

C = {RRR, RRV, RVR, VRR}

D = {RVR, VRV}

2. Lanzamos una moneda al aire. ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cuál es la probabilidad de sacar cara, y de sacar cruz?

Si en vez de una moneda, es una chincheta, responder a las mismas preguntas.

SOLUCIÓN:

- Para la moneda

E = {cara, cruz} | P(cara) = P(cruz) = 1/2 | P(cara) + P(cruz) = 1

- Para la chincheta

E = {hacia arriba, hacia abajo}

NO podemos decir que la probabilidad de cada una es ½, porque los sucesos NO SON EQUIPROBABLES.

3. Se lanza un dado cúbico, con caras numeradas del 1 al 6, y otro dodecaédrico, con caras numeradas del 1 al 12. Si lanzamos los dados al aire:

¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en cada una de ellos?

¿Y de que salga un 1 en los dos dados?

SOLUCIÓN:

Por la Ley de Laplace

- En el cúbico → P(1)=1/6
- En el dodecaédrico → P(1)=1/12

Como son sucesos independientes, la probabilidad será:

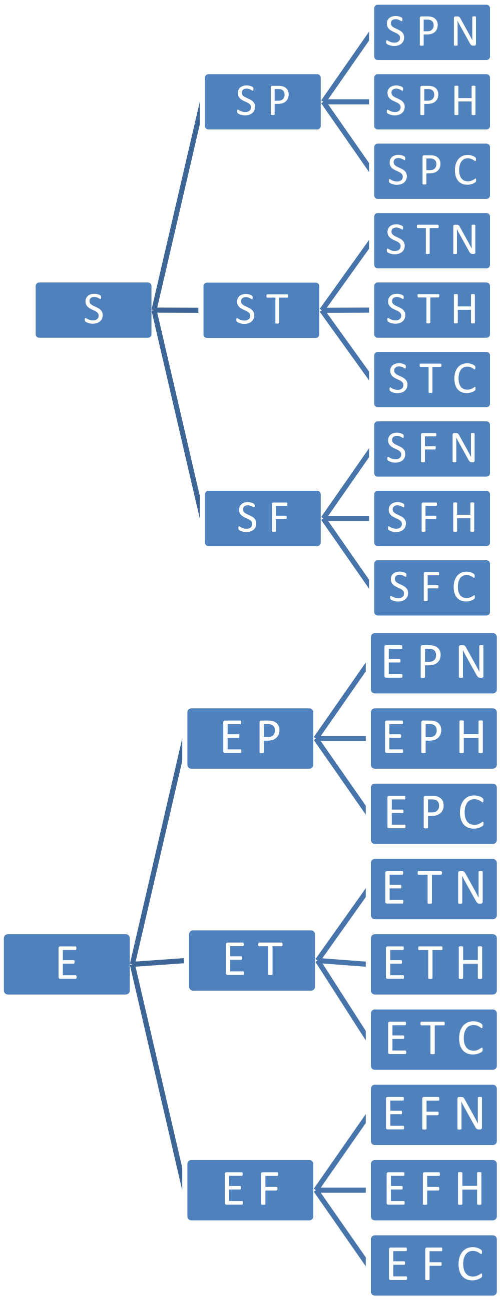
$$P(1)\cdot P(1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{72}\rightarrow 1{,}39\%$$

4. Vamos a comer a un restaurante; en el menú del día, como primer plato tenemos sopa (S) y ensalada (E); de segundo plato, pasta (P), trucha (T) y filete (F); y de postre, natillas (N), helado (H) y café (C).

Hacer un diagrama de árbol con todas las posibilidades.

¿Cuántas combinaciones posibles hay?

SOLUCIÓN:



Como vemos, hay 18 combinaciones posibles.

5. Lanzamos un dado cúbico (6 caras), numeradas del 1 al 6, y observamos la puntuación obtenida. *(Se muestran las soluciones tras las preguntas)*

- Escribe el espacio muestral → E = {1,2,3,4,5,6}
- Escribe los siguientes sucesos:
  - A = *"obtener número par"* → A = {2,4,6}
  - B = *"obtener más de 3"* → B = {4,5,6}
  - C= *"obtener menos de 3"* → C = {1,2}
  - D = "obtener más de 8" → D = {Ø}
  - E = *"obtener menos de 8"* → E = {1,2,3,4,5,6}
- ¿Qué sucesos es más probable, el B o el C? → Es más probable B
- ¿Cuál de los anteriores es un suceso imposible? → el D
- ¿Cuál de los anteriores es un suceso seguro? → el E

6. Calcula la probabilidad de obtener un número mayor que 2 al lanzar un dado cúbico correcto con sus caras numeradas de 1 a 6.

SOLUCIÓN:

Hay 4 posibilidades: el 3, el 4, el 5 y el 6: $P[número\ mayor\ que\ 2] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

7. En una bolsa hay bolas iguales de tres colores: 3 blancas, 4 verdes y 5 rojas; si se saca una bola y se mira el color, halla la probabilidad de que:

(Se muestran las soluciones tras las preguntas)

(En total, 3+4+5=12 bolas)

- Sea blanca → $P(blanca) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
- Sea verde → $P(verde) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
- Sea roja → $P(roja) = \frac{5}{12}$

(Obviamente, la probabilidad de que sea o blanca, o verde o roja ha de ser 1; lo comprobamos: $((blanca) + P(verde) + P(roja) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3+4+5}{12} = \frac{12}{12} = 1$

- No sea verde →

$$P(no\ verde) = P(\overline{verde}\ ) = 1 - P(blanca\ o\ roja) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12}\right) = \frac{12-3-5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

8. Si lanzamos simultáneamente 2 monedas al aire, calcula la probabilidad de:

(Se muestran las soluciones tras las preguntas)

- Sacar dos caras → $P(2caras) = P(cara) \cdot P(cara) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Sacar dos cruces → $P(2cruces) = P(cruz) \cdot P(cruz) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Sacar cara en una moneda y cruz en la otra

$$P(1cara\&1cruz) = P(cara\ y\ cruz) + P(crux\ y\ cara) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

9. Una caja contiene 10 bolas, 7 blancas y 3 negras. Si se sacan 2 bolas al azar, escribe el espacio muestral y calcula la probabilidad de: *(Se muestran las soluciones tras las preguntas)*

→ E = {BB, BN, NN, NB}

- Los dos sean del mismo color, con reemplazamiento (se devuelve a la caja la bola que hemos sacado)

  $\rightarrow P(BB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$

  $\rightarrow P(NN) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

- Las dos sean del mismo color, sin reemplazamiento (no devolvemos a la caja la que hemos sacado)

  $\rightarrow P(BB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7\cdot3\cdot2}{5\cdot2\cdot3\cdot3} = \frac{7}{15}$

  $\rightarrow P(NN) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3\cdot2}{5\cdot2\cdot3\cdot3} = \frac{1}{15}$

10. Se extrae una bola de urna que tiene 4 bolas verdes, 5 blancas y 5 negras; halla la probabilidad de que al sacar una bola: *(Se muestran las soluciones tras las preguntas)*

- Sea verde o blanca → $P(V \cup B) = P(V) + P(B) = \frac{4}{14} + \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$

- No sea blanca → $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

11. Ana y Miguel, dos alumnos de 3º de la ESO, tienen respectivamente 1/2 y 1/5 de probabilidades de suspender un examen de Lengua. La probabilidad de que ambos suspendan simultáneamente el examen es de un 1/10. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos suspenda el examen?

SOLUCIÓN:

$$P(ana \cup miguel) = P(ana) + p(miguel) - P(ana \cap miguel) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

12. Lanzamos simultáneamente dos dados cúbicos; calcula la probabilidad de:
(Se muestran las soluciones tras las preguntas)

- Dos unos → $P(uno) \cdot P(uno) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 6^{-2}$
- Dos números distintos de uno →

$$P(\overline{uno}) \cdot P(\overline{uno}) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

13. Lanzamos al aire una moneda tres veces seguidas; calcula la probabilidad de:
(Se muestran las soluciones tras las preguntas)

- Sacar tres cruces *(+)* → $P(+++) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$

–Dos caras *(c)* → $P(cc+) + P(c+c) + P(+cc) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

14. Se ha probado experimentalmente que la probabilidad de que una moneda trucada caiga *cara* es 0,35. Si lanzamos simultáneamente dos monedas trucadas de este tipo, ¿cuál es la probabilidad de que, al menos una de ellas, caiga *cara*?

<u>*SOLUCIÓN*</u>:

$$P(cara1 \cup cara2) = P(cara1) + P(cara2) - P(cara1 \cap cara2) =$$
$$= 0.35 + 0.35 - 0.35 \cdot 0.35 = 0.5775$$

15. En un partido de fútbol, a un equipo le pitan 2 penaltis en contra. Los va a tirar el mismo delantero del equipo contrario, cuya probabilidad de meter gol es 0,8 (es decir, mete 8 penaltis de cada 10 que tira). *(Se muestran las soluciones tras las preguntas)*

– Halla la probabilidad de que meta, al menos, un gol

$$P(un\ gol) = P(gol1) + P(gol2) - P(gol1\ \cap gol2) = 0.8 + 0.8 - 0.8 \cdot 0.8 = 0.96$$

– ¿Cuál es la probabilidad de que falle los dos penaltis?

$$P(falle1\ \cap falle2) = 1 - P(\overline{falle1\ \cap falle2)} = 1 - 0.96 = 0.04$$

16. Se lanzan al aire 4 monedas iguales. Calcula la probabilidad de:

(Se muestran las soluciones tras las preguntas)

– Sacar 4 caras

$$P(4caras) = P(cara1) \cdot P(cara2) \cdot P(cara3) \cdot P(cara4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0.0625$$

– No sacar ninguna cara

$$P(ninguna\ cara) = P(4cruces) = 0.0625$$

17. Acuden a una cena 28 hombres y 32 mujeres; de postre, han comido flan 16 hombres y 20 mujeres; el resto han comido tarta. Si elegimos al azar uno de los comensales, calcula la probabilidad de que:

– sea hombre
– haya comido tarta
– sea hombre y haya comido flan

– <u>*SOLUCIÓN*</u>:

Lo primero, confeccionamos la tabla de doble entrada:

	flan	tarta	total
hombre	16	12	28
mujer	20	12	32
total	36	24	***60***

$$P(hombre) = \frac{28}{60} = \frac{7}{15} = 0.46$$

$$P(tarta) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$P(hombre\ y\ flan) = \frac{16}{60} = \frac{4}{15} = 0.27$$