



Mathematics 2ESO
Unit 10
PROBABILITY

IES Mata Jove

Course 2018/2019

Vocabulary

experimento	<i>experiment</i>
aleatorio	<i>ramdon</i>
determinista	<i>deterministic</i>
espacio muestral	<i>sample space</i>
resultado (del experimento)	<i>outcome</i>
suceso	<i>event</i>
suceso elemental	<i>elementary/simple event</i>
suceso compuesto	<i>composite event</i>
verificarse un suceso	<i>an event occurs</i>
sucesos incompatibles	<i>mutually-exclusive/incompatible events</i>
sucesos compatibles	<i>non-mutually-exclusive/compatible events</i>
sucesos contrarios	<i>complementary events</i>
suceso imposible	<i>impossible event</i>
suceso seguro	<i>certain event</i>
sucesos independientes	<i>independent events</i>
sucesos equiprobables	<i>equally likely events</i>
probabilidad	<i>probability</i>
probabilidad condicionada	<i>conditional probability</i>

Bibliografía

<http://www.bbc.co.uk/schools/gcsebitesize/maths/>

<http://www.bbc.co.uk/education/topics/z3tnvcw/resources/1>

Matemáticas 1ESO, proyecto Los caminos del saber. Editorial Santillana. Madrid, 2010.

Matemáticas 4ESOb, proyecto Los caminos del saber. Editorial Santillana. Madrid, 2010.

Martin Gardner. ¡Ajá! Paradojas que hacen pensar. RBA 2007.

La **Probabilidad** es la rama de las Matemáticas que se ocupa de los fenómenos en los que interviene el azar.

Experimento aleatorio

Un fenómeno o un experimento se dice **aleatorio** (*random experiment*) cuando cumple las condiciones siguientes:

No se conoce, antes de realizar el experimento, cuál será su **resultado** (*outcome*).

Sí se conocen todos los posibles resultados del experimento.

Se puede repetir, en condiciones similares, cuantas veces se quiera.

Se llama **espacio muestral** (*sample space*) del experimento aleatorio al conjunto de todos los posibles resultados del experimento. Se suele denotar **E**.

Sucesos

Sea un experimento aleatorio con espacio muestral E. Los elementos de E se llaman **sucesos elementales** (*elementary event*).

Sea **part(E)** el conjunto de todos los subconjuntos de E. Los elementos de part(E) se llaman **sucesos** (*events*), y son la unión de sucesos elementales.

El conjunto part(E) contiene todos los posibles sucesos asociados a este experimento, desde \emptyset , **suceso imposible** (*impossible event*) hasta E, **suceso seguro** (*certain event*).

Decimos que un suceso A se verifica (*an event takes place or occurs*) cuando el resultado del experimento es un elemento de A.

Sean A y B dos sucesos. Los sucesos son:

- **Incompatibles** (*mutually-exclusive/incompatible events*):

Si no pueden verificarse a la vez \Leftrightarrow no tienen elementos en común.

- **Compatibles** (*non-mutually-exclusive/compatible events*):

Si pueden verificarse a la vez \Leftrightarrow si tienen elementos en común.

- **Contrarios** (*complementary events*):

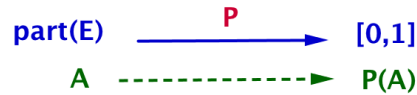
Si $A \cap B = \emptyset$ (no tienen elementos en común) y $A \cup B = E$ (entre los dos sucesos contienen todos los posibles resultados del experimento).

En este caso denotamos $B = \bar{A}$.

Probabilidad de un suceso

Sea un experimento aleatorio con espacio muestral E .

Una **probabilidad** (*probability*) asociada al experimento aleatorio es una función P , que a cada suceso A le asocia un número $P(A)$ entre 0 y 1 que mide la facilidad con la que el suceso puede ocurrir.



Propiedades de la probabilidad

La función que define una probabilidad debe cumplir las siguientes propiedades:

- Sea $A \in \text{part}(E)$ un suceso, entonces $0 \leq P(A) \leq 1$.
- En cualquier experimento aleatorio, $P(E) = 1$ $P(\emptyset) = 0$.
- Sea $A \in \text{part}(E)$ un suceso, entonces $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.
- Sean $A, B \in \text{part}(E)$ dos sucesos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Como consecuencia, para sucesos A, B incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Asignación de probabilidad

Dado un experimento aleatorio con espacio muestral E , la forma de asociarle una probabilidad a un determinado suceso A depende del tipo de experimento que estemos estudiando.

En muchas ocasiones se utiliza lo que se llama frecuencia relativa del suceso.

Sea el suceso A , entonces
$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de veces que } A \text{ se verifica}}{\text{n}^\circ \text{ de repeticiones del experimento}}.$$

Si el experimento aleatorio del que estamos tratando de medir la probabilidad es regular, podemos usar la conocida como **Regla de Laplace**. Un experimento aleatorio se dice **regular** cuando todos sus sucesos elementales son equiprobables (**equally likely events**), es decir, tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Sea el suceso A , entonces
$$P(A) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{n}^\circ \text{ de casos posibles}}$$

ACTIVITY 1

1) Clasifica los siguientes experimentos en deterministas o aleatorios.

Calcular la longitud de tu mano	Lanzar un dado y anotar el resultado	Determinar el peso de un ladrillo	Jugar a la lotería	Determinar si mañana lloverá
Lanzar una piedra al aire y verificar si cae o no	Hacer una quiniela y comprobar el resultado	Predecir el ganador de una carrera de caballos	Color de pelo de la próxima persona en subir al autobús	Lanzar una moneda al aire
Medir la longitud de una circunferencia de radio 5cm	Predecir la temperatura máxima de mañana	Predecir el número de goles marcados en un partido	Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo	Adivinar quién será la próxima persona que me llame por teléfono

2) En los siguientes experimentos aleatorios, distingue los sucesos elementales de los sucesos compuestos.

throw a die	to get an even number	to get a prime number	to get a number greater than or equal to 5	to get a multiple of 4	to get 7	to get a number less than 7
toss two coins	to get two heads	to get one head and one tail	to get at least one tail	to get head first & tail second	to get no tails	to get three heads

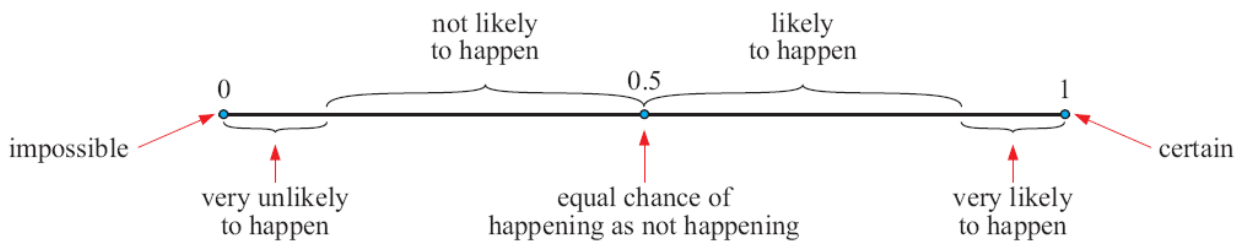
3) En los siguientes experimentos aleatorios, determina el espacio muestral.

Extraer una bola de una urna con 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 azul	Extraer una carta de una baraja española y anotar el palo	Lanzar dos dados y anotar la suma de las caras obtenidas
Extraer una bola de una bolsa con 5 bolas numeradas del 1 al 5	Lanzar tres monedas y contar el número de caras obtenidas	Coger un huevo de la nevera, donde los hay crudos o cocidos

The study of **probability** deals with the **chance** or **likelihood** of an event happening. For every event we can carefully assign a number which lies between 0 and 1 inclusive.

An **impossible** event which has 0% chance of happening is assigned a probability of 0.
 A **certain** event which has 100% chance of happening is assigned a probability of 1.
 All other events between these two extremes can be assigned a probability between 0 and 1.

The number line below shows how we could interpret different probabilities:



4) Using words to describe probabilities.

We often use words to describe how probable we think it is that an event will take place. For example, we might say that it is likely to be sunny tomorrow, or that it is unlikely to snow in August.

Have a look at the statements below, and decide whether the following events are: certain, likely, even (equal chance), unlikely or impossible.

You buy a lottery ticket and win the jackpot	You toss a coin and get heads	Christmas will fall on 25 December this year	You grow another nose	It will rain in the first week of December

5) A game is played where 7 beads (*canica*) with digits from 1 to 7 on them are placed in a bag, a bead is taken out, and you then have to guess whether the number on the next one to be taken out will be higher or lower, and so on.

In each case, choose an appropriate word from the following list to complete each sentence:

Impossible Unlikely Even Likely Certain

Remember that there is only one of each number.

If the 1 st bead is 7, what is the chance of the 2 nd bead being lower than 7?	If the 2 nd bead is 1, what is the chance of the 3 rd bead being lower than 2?	If the 3 rd bead is 6, what is the chance of the next bead being higher than 4?

ACTIVITY 2

6) Se lanza un dado cargado (trucado) con forma de tetraedro y anotamos la cara que queda oculta. Repetimos el experimento 100 veces. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

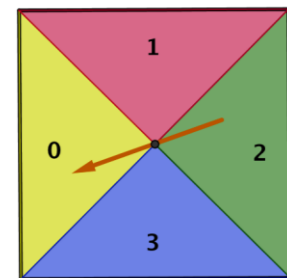
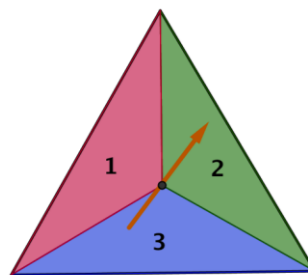
¿Qué crees que es mejor, apostar a que sale par o a que sale impar? Justifica tu respuesta.

¿Cuál dirías tú que es la probabilidad de que salga cada una de las caras del tetraedro?

cara	f_i	h_i frecuencia relativa
1	28	
2	22	
3	30	
4	20	

7) Aquí tienes dos ruletas, una triangular y otra cuadrada. En cada jugada los puntos obtenidos son la suma de los números de las casillas donde apuntan las flechas.

Determina el espacio muestral de este experimento aleatorio. Puedes ayudarte de la tabla siguiente para anotar todos los sucesos elementales que lo forman.



Δ											
\square											
puntos											
How many different possible outcomes are there?	How many outcomes gave a total score of 2?	What is the probability of getting a total score of 2?	How many outcomes gave a total score of 4?	What is the probability of getting a total score of 4?							

8) Hoy vamos a hacer un experimento. Dispones de unas chinchetas y de unos dados. Si lanzas la chincheta puede caer en una de las siguientes posiciones:



¿Cuál crees que es más probable? ¿A qué posición apostarías?

Con los dados parece claro que todas las caras tienen la misma probabilidad de salir. Pero, ¿estás seguro/a de que los dados están bien equilibrados?

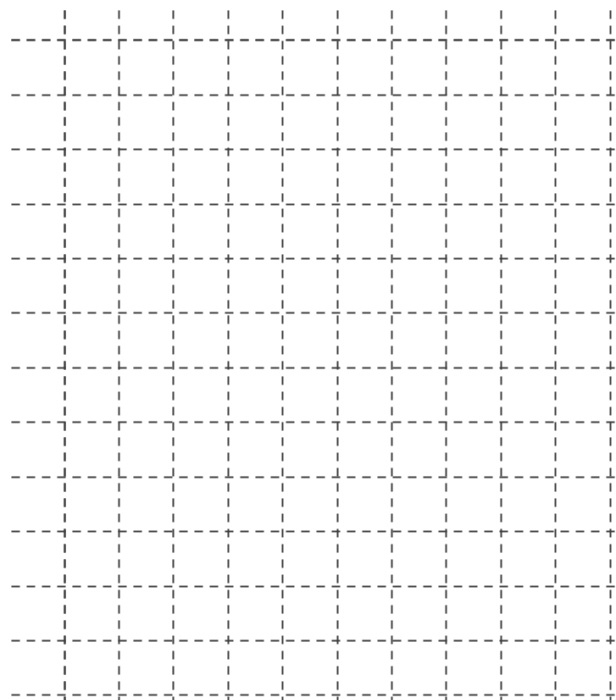
Entre todos los miembros del grupo debéis contabilizar 100 lanzamientos de cada tipo de objeto. Luego completar las tablas de frecuencias y representar gráficamente los datos.

Cara	1	2	3	4	5	6
Recuento						

DADOS

(Dibuja un diagrama de barras)

	frecuencia absoluta	frecuencia relativa	%
1			
2			
3			
4			
5			
6			

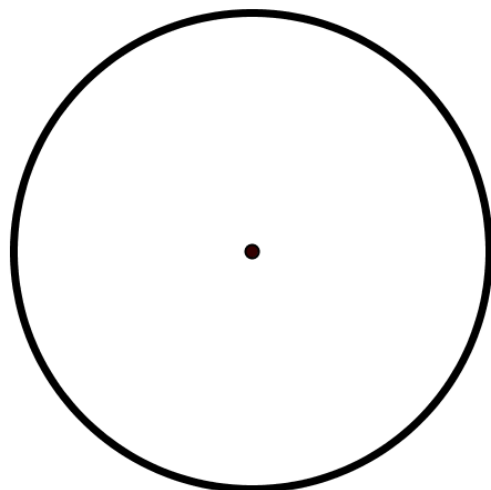


¿Crees que los dados están bien equilibrados?	¿Crees que con este experimento se pueden identificar dados desequilibrados?

	Recuento lanzamiento de chinchetas
↗	
⊥	

CHINCHETAS
(dibuja un diagrama de sectores)

	frecuencia absoluta	frecuencia relativa	%	grados
↗				
⊥				



¿Cuál crees que es la posición más probable? ¿A cuál apostarías?

ACTIVITY 3

9)

Cuatro gatitos.

Al calcular las probabilidades hay que tener mucho cuidado ya que es fácil despistarse y, en ocasiones, lo que parece evidente no tiene porqué ser cierto. Veamos aquí el caso de una pareja de gatos y su descendencia.

Sr. Gato: Oye, salada, ¿cuántos gatitos hemos tenido en la última camada?

Sra. Gata: ¡Pero qué zángano eres! ¿No sabes contar? ¡Pues cuatro!

Sr. Gato: ¿Cuántos han sido machos?

Sra. Gata: Es difícil de saber. Todavía no te lo puedo decir.

Sr. Gato: No es muy probable que los cuatro hayan sido machos.

Sra. Gata: Y tampoco lo es que las cuatro sean hembras.

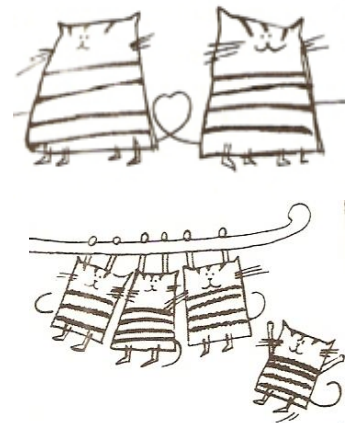
Sr. Gato: A lo mejor sólo hay un gatito macho.

Sra. Gata: Y tal vez haya solamente una hembra.

Sr. Gato: Calcularlo no es muy difícil. El que el gatito sea macho o hembra es cosa de cara o cruz. Así pues, es evidente que lo más verosímil es que haya dos machos y dos hembras. ¿Les ponemos nombres ya?

¿Ha razonado correctamente el Sr. Gato?

Realiza los cálculos para averiguar qué configuración de machos/hembras es más probable.



10)

Desconcertantes loritos

A Teo y a Alicia se les daba bien el cálculo de probabilidades así que dieron con las respuestas correctas. ¿Sabes tú cuáles son?, ¿y sabes por qué la respuesta de Teo es distinta a la de Alicia?

La abuela Martina tenía dos pequeños loros. Un día su nieto Teo le preguntó:

—Abuela, ¿es macho alguno de tus loritos?

—Sí, en efecto.

La abuela Martina conocía las aficiones matemáticas de su nieto y le preguntó:

—Teo, ¿cuál es la probabilidad de que ambos pájaros sean machos?

A lo que Teo respondió:

—

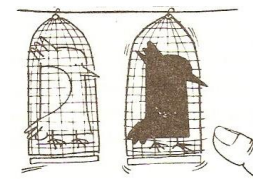
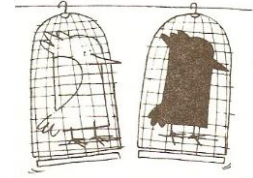
Otro día fue a visitar a la abuela Martina su nieta Alicia, también aficionada a las matemáticas como su primo Teo. Alicia le preguntó a su abuela:

—¿Es macho el loro oscuro?

—Así es, Alicia. ¿Sabes cuál es la probabilidad de que los dos loritos sean macho?.

— respondió Alicia.

A Teo y a Alicia se les daba bien el cálculo de probabilidades así que dieron con las respuestas correctas. ¿Sabes tú cuáles son?, ¿y sabes por qué la respuesta de Teo es distinta a la de Alicia?



ACTIVITY 4

11) We throw a die and add up all the faces except the upper one. Find out the sample space and the probability of rolling a multiple of 3.

top face					
experiment outcome					
sample space, E		multiples of three, A		P(A)	

12) Se tienen 50 bolas en una caja. Las bolas están numeradas del 1 al 50. Cogemos una bola de la caja. Sea n el número de la bola obtenida y sean los sucesos:

$A = n$ es un múltiplo de 5 ; $B = n$ es un múltiplo de 3 ; $C = n$ es divisible por 2,

$D = n$ es divisible por 10 ; $F = n$ es divisible por 1 ; $G = n$ es un múltiplo de 11.

¿Es regular el experimento aleatorio <i>sacar una bola de la caja</i> ?	¿Cuál es la probabilidad de cada suceso elemental?
---	--

Determina qué sucesos elementales forman cada uno de los sucesos señalados.

A	B	C	D	F	G
Entre los mencionados, ¿existe alguna pareja de sucesos incompatibles?			Entre los mencionados, ¿existe alguna pareja de sucesos contrarios?		

Calcula la probabilidad de los sucesos:

$A \cap B$	$B \cup C$	$D \cap G$
------------	------------	------------

13) Supongamos un espacio muestral con cuatro sucesos elementales. ¿Puede ser cierta la siguiente afirmación? Justifica adecuadamente tu respuesta.

Las probabilidades de los sucesos elementales son: $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}$

14) We have a loaded die with six faces and we know the following facts about the probability of its faces: $P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{7}$ and $P(4) = P(5) = P(6)$. Find the probability of faces 4, 5 and 6.

15) En un dado cargado, la probabilidad de obtener cada una de las seis caras se comporta del modo siguiente:

Todas las caras con n° primo tienen la misma probabilidad de salir.	Todas las caras con n° compuesto tienen la misma probabilidad de salir	La probabilidad de obtener un n° primo es el doble que la de obtener un n° compuesto	La probabilidad de obtener 1 es la mitad que la de obtener un n° primo
¿Cuál es la probabilidad de cada cara?			¿Cuál es la probabilidad de obtener un n° par?

ACTIVITY 5

16) We toss three coins. Write down the sample space. Calculate the probability of each simple event and the probability of the following events.

A = 3 heads B = 0 heads C = 4 heads D = 2 tails & 1 head

F = 2 heads & 1 tail G = 1 tail H = at least 2 heads I = no more than 1 head

TREE DIAGRAM

P(A) =	P(B) =	P(C) =	P(D) =
P(F) =	P(G) =	P(H) =	P(I) =

17) Four coins are tossed. Describe the sample space using a tree diagram. Use the diagram to point out the outcomes that form the events A, B and their complementary events.

A = to get at least one head B = to get just one head

Calculate the probability of these events and also the probability of C = to get two tails.

TREE DIAGRAM

$$P(A) = \quad \left| \quad P(\bar{A}) = \quad \left| \quad P(B) = \quad \left| \quad P(\bar{B}) = \quad \left| \quad P(C) =$$

ACTIVITY 6

18) Hay 20 bolas en una bolsa, 12 rojas y 8 azules. Sacamos dos bolas de la bolsa. En el primer caso, después de sacar la primera bola, la devolvemos a la bolsa y entonces sacamos la segunda bola. En el segundo caso, sacamos las dos bolas al mismo tiempo.

Calcula la probabilidad del suceso extraer primera bola roja y segunda bola azul en ambos casos.

**extracción sucesiva con
reemplazamiento**

extracción simultánea

19) Se tienen 10 bolas en una urna, 4 rojas y 6 blancas. Extraemos 2 bolas de la urna, consecutivamente y sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de los sucesos:

A = extraer dos bolas blancas

B = extraer una bola roja y otra blanca

C = extraer al menos una bola roja

20) Consideramos el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y sumar el resultado de las caras superiores.

¿Cuál crees que es el resultado más probable? Elabora el diagrama que represente el espacio muestral del experimento para justificar tu respuesta.

¿Qué porcentaje de lanzamientos dan como resultado un número primo?

Si un jugador apuesta por 'sacar 8' y otro apuesta por 'sacar 5 o sacar 3', ¿quién crees tú que tiene más probabilidades de ganar?

ACTIVITY 7

21) Los dados cargados.

Pablo y su hermano Hugo están jugando con unos dados poco frecuentes. Normalmente un dado es un cubo con sus caras numeradas del 1 al 6. Y, cuando lanzas el dado, todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.



Los dados de Pablo y Hugo también son cubos con sus caras numeradas del 1 al 6, pero sus caras no tienen la misma probabilidad de salir, son dados cargados.

Para estos dados la probabilidad de que salga una cara es proporcional a su número.

- I. Los hermanos juegan a lanzar unos de estos dados cargados. Pablo apuesta a que sale par y Hugo a que sale impar. ¿Quién crees que tiene más probabilidades de ganar?

Justifica tu respuesta.

- II. Vamos a tratar de calcular la probabilidad de obtener cada una de las caras de uno de estos dados cargados con el que juegan los hermanos.

- a) Completa la tabla traduciendo las afirmaciones a lenguaje algebraico. Solo puedes usar una variable, x , que representa la probabilidad de sacar un 1, $P(1) = x$.

La probabilidad de salir 2 es el doble que la de salir 1	La probabilidad de salir 3 es el triple que la de salir 1	En este dado, el 4 es cuatro veces más probable que el 1	En este dado, el 5 es cinco veces más probable que el 1	La probabilidad de sacar 6 es seis veces la de sacar 1
$P(2) =$	$P(3) =$	$P(4) =$	$P(5) =$	$P(6) =$

La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales del experimento aleatorio es igual a 1

- b) Resuelve la ecuación que acabas de encontrar para calcular la probabilidad de obtener cada una de las caras del dado cargado. Completa la tabla con dichas probabilidades.

cara	1	2	3	4	5	6
probabilidad						

- III. Ahora Pablo y Hugo están jugando con 2 de estos dados cargados. Lanzan los 2 dados y suman los resultados de las 2 caras. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de 5 en este juego? (Usa el diagrama de árbol del ejercicio 20).
- IV. Si jugásemos a este juego con un par de dados normales, con todas las caras equiprobables, la probabilidad de que ambas caras sumen 5 es la misma que la probabilidad de que ambas caras sumen 9. ¿Por qué crees que esto es así? ¿Crees que eso sigue ocurriendo en el juego con los dados cargados? Justifica tus respuestas.
- V. Cansados de sumar caras, Hugo le propone a su hermano jugar con uno de sus dados cargados y con una moneda bien equilibrada, donde la probabilidad de cada cara es del 50%.

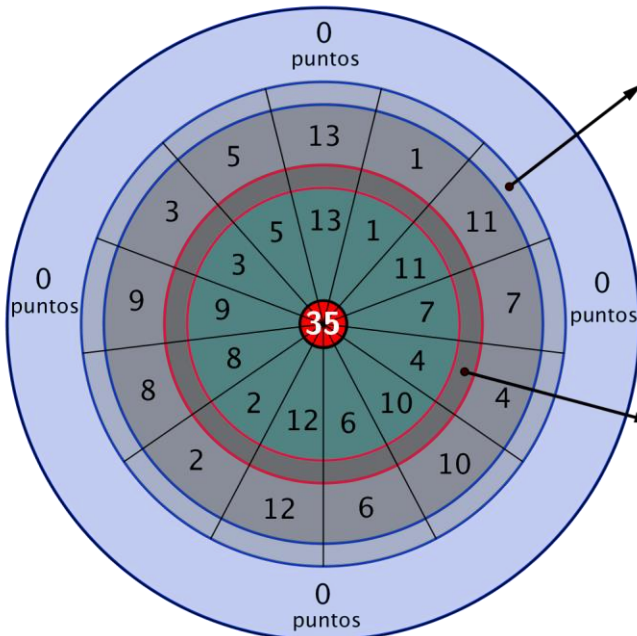
Dibuja el diagrama de árbol correspondiente a este experimento aleatorio.

Calcula la probabilidad de obtener par y cara.

ACTIVITY 8

22) En la diana.

Es muy probable que alguna vez hayas jugado a los dardos. Quizás no tengas muy claro cómo se asignan los puntos dependiendo de la zona del tablero en la que se clava el dardo. La imagen siguiente te lo explica.



zona de puntuación doble

Los dardos que se clavan en esta corona circular duplican la puntuación correspondiente al sector. En el caso señalado, la zona vale 22 puntos.

La corona circular externa no puntúa. Cada uno de los trece sectores circulares tiene asignada una puntuación. El círculo central vale 35 puntos.

zona de puntuación triple

Los dardos que se clavan en esta corona circular triplican la puntuación correspondiente al sector. En el caso señalado, la zona vale 12 puntos.

Supongamos que tenemos un jugador, Evaristo, capaz de clavar el 100% de los dardos lanzados en el tablero, pero sin ninguna puntería. Es decir, todos sus dardos se clavan en el tablero, pero la zona del tablero donde clava el dardo es totalmente aleatoria.

El tablero de la diana está formado por 6 circunferencias concéntricas. La tabla siguiente muestra los radios de cada una de ellas, desde la más pequeña, que define el centro de la diana, a la más externa, que define el borde del tablero.

1,5 cm	10 cm	11 cm	16 cm	17 cm	23 cm
--------	-------	-------	-------	-------	-------

- I. Supongamos que Evaristo lanza un único dardo que, por supuesto, se clava en el tablero

¿Qué es más probable, que se clave en el 1 o en el 13?
Justifica tu respuesta.

¿Qué es más fácil, clavar el dardo en un doble o en un triple?
Justifica tu respuesta.

En este juego, la probabilidad de obtener una determinada puntuación se calcula dividiendo el área de la zona del tablero que da esa puntuación entre el área total del tablero.

- II. ¿Cuál es la probabilidad de que Evaristo acierte a clavar el dardo en el centro de la diana (35 puntos) si hace un único lanzamiento?

- III. Supongamos que Evaristo lanza 2 dardos. ¿De cuántas formas puede obtener 11 puntos? (No tengas en cuenta el orden de los dardos).

- IV. Supongamos que Evaristo lanza y clava 3 dados en el tablero. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga 0 puntos?

- V. La máxima puntuación para un lanzamiento es 39 puntos, con un 13 triple. ¿Qué crees que es más difícil, clavar el dardo en el centro de la diana (35 puntos) o en un 13 triple? Justifica tu respuesta.

ACTIVITY 9

23) Choose a random number between 1 and 30. Consider the events:

A = choose an even number less than or equal to 14.

B = choose a multiple of 3 less than or equal to 14.

C = choose a multiple of 10.

Work out the probability of these events. Also calculate the probability of the complementary of these events:

$$P(A) = \quad \left| \quad P(\bar{A}) = \quad \left| \quad P(B) = \quad \left| \quad P(\bar{B}) = \quad \left| \quad P(C) = \quad \left| \quad P(\bar{C}) =$$

24) Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

En el experimento aleatorio lanzar un dado y luego una moneda	V	F	En el experimento aleatorio lanzar un dardo a la diana del ejercicio 21	V	F
El suceso obtener par y cara y el suceso obtener impar y cara son incompatibles			El espacio muestral del experimento aleatorio está formado por todos los números naturales entre 1 y 39		
El suceso sacar una cara en la moneda y el suceso sacar un número primo en el dado son compatibles			Los sucesos obtener 12 puntos y obtener puntuación triple son incompatibles		
El suceso obtener múltiplo de 3 y una cruz y el suceso obtener un 6 y una cruz son dependientes			Los lanzamientos sucesivos de dardos son sucesos independientes		
El suceso sacar un 5 y una cruz y el suceso no sacar 5 o no sacar cruz son contrarios			Los sucesos clavar el dardo en un triple y obtener 8 puntos son compatibles		
El suceso sacar un 3 y una cara y el suceso no sacar ni 3 ni cara son sucesos contrarios			La unión de los sucesos obtener 5 puntos y obtener 6 puntos es el suceso obtener 11 puntos		
El suceso sacar un 5 y el suceso sacar cruz son sucesos contrarios			La intersección de los sucesos obtener puntuación doble y obtener 10 puntos es el suceso clavar el dardo en el 5 doble		