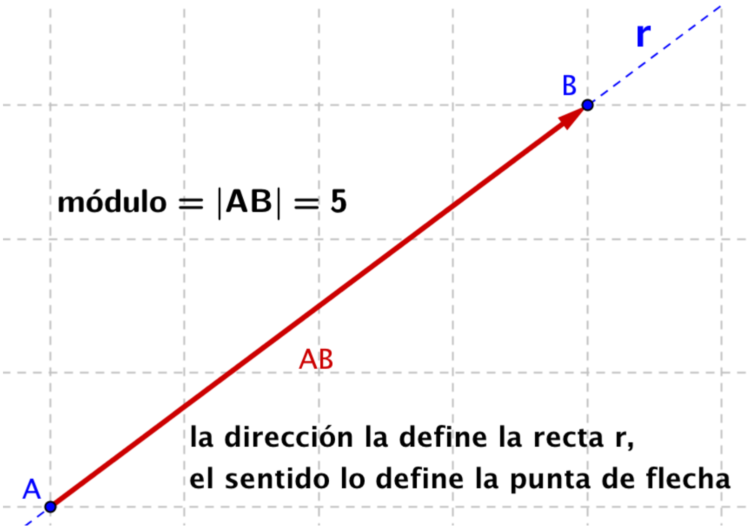
VECTORES DEL PLANO

SESIÓN 1

Vectores: coordenadas, propiedades y operaciones

La representación más simple de un vector es la de una flecha, un segmento orientado, que conecta dos puntos, un punto inicial A con un punto final B.

Por tanto, $\overrightarrow{AB}$ representa el vector que va del punto A al punto B, mientras que $\overrightarrow{BA}$ representa el vector, de igual longitud y sentido opuesto, del punto B al A. Para poder comparar vectores y operar matemáticamente con ellos, se hace necesario disponer de un sistema de representación más adecuado que los segmentos orientados. Las coordenadas cartesianas son una estupenda herramienta en este sentido.



coordenadas de un vector

- ✓ Sea $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vector con punto inicial $A = (a_1, a_2)$ y punto final $B = (b_1, b_2)$.

  Las **coordenadas del vector** son $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

características de un vector

- ✓ Sea el vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$

  El **módulo (longitud)** del vector es $r = |\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$

  El **argumento (ángulo)** del vector se calcula a través de $tg \propto = \frac{u_2}{u_1}$

  por lo que $\propto = arctg\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$

- ✓ Sea el punto $A = (a_1, a_2)$. Se define el **vector de posición** (también **radio vector**), como el vector $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$

propiedades de un vector

Dos vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{CD}$ (con diferentes puntos finales) son **equivalentes** si tienen las mismas coordenadas. Esto significa que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Sólo difieren en el punto inicial.

Dos vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{CD} = (v_1, v_2)$ son **paralelos** si sus coordenadas son proporcionales $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$

operaciones con vectores

Sean los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, el punto $A = (a_1, a_2)$ y el número real α. Se definen las siguientes operaciones:

- ✓ **suma de dos vectores**: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- ✓ **multiplicación por un número**: $\alpha \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2)$

SESIÓN 2

Actividades

1. Dados los puntos $A = (-2, 0), B = (0, 0), C = (3, -2)$ calcula las coordenadas y también el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$, represéntalos en los ejes coordenados.

2. Dados los puntos $A = (0, 0), B = (1, 1), C = (0, 2)$, calcula las coordenadas de un punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean:

a) equivalentes

b) paralelos

3. Los puntos $A = (-1, 1), B = (0, 2), C = (2, 0)$ son los vértices de un triángulo. Calcula las coordenadas de los vectores que forman sus vértices.¿El triángulo es equilátero?

4. Si $\vec{u} = (-3, 2)$ y $\vec{w} = (4, -1)$ ¿cuál es el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$?

5. Dados los vectores $\vec{u} = (6, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$, efectúa las siguientes operaciones algebraicamente en tu libreta.

$2\vec{u} + 3\vec{v}$ $\qquad\qquad$ $(-1)\vec{v} - \vec{u}$

6. Dados los vectores $\vec{u} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right), \vec{v} = (2, -1), \vec{w} = (-4, 7)$ y $\vec{t} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right)$

calcula las coordenadas de los siguientes vectores

$\vec{r} = 2.(\vec{u} + \vec{v})$ $\qquad\qquad$ $\vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{w})$

7. Dados los puntos $A = (8, -3), B = (5, -1), C = (4, 3)$ calcula las coordenadas de los siguientes vectores $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$ $\quad y \quad$ $\vec{v} = \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

SESIÓN 3

Actividades

1. Dados los puntos A=(3,4) y B=(-1,6), calcula las coordenadas de los vectores siguientes :

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

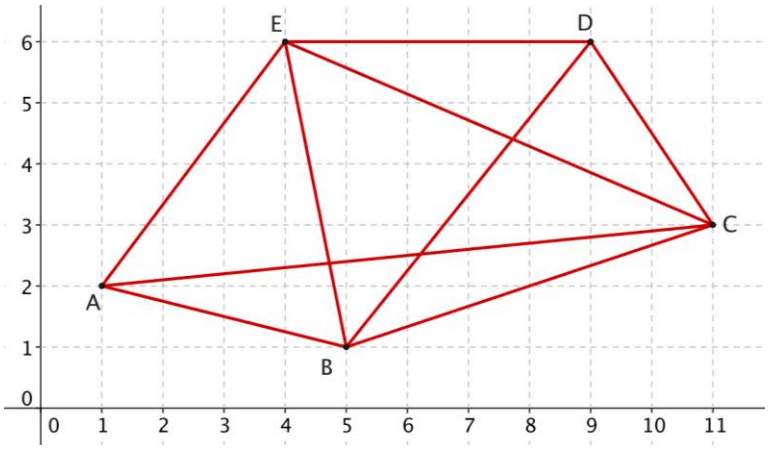
b) Un vector paralelo a $\vec{u}$.

c) Un vector paralelo a $\vec{u}$ con módulo 1.

d) Un vector paralelo a $\vec{u}$ con módulo 5.

e) Si C=(2,2) y D=(0,-1).Calcula el ángulo agudo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

2. Calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}$ en el siguiente gráfico



3. Si los puntos $A=(1,1), B=(1,3), C=(7,3)$ son los vértices del paralelogramo $ABCD$. Calcula las coordenadas del punto D y las coordenadas del vector $\overrightarrow{BD}$

4. Calcula el módulo y el argumento del vector $\overrightarrow{AB}$ siendo $A=(-4,1), B=(5,-2)$

PUNTO MEDIO. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

SESIÓN 4

Coordenadas del punto medio de un segmento

Dos puntos A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) determinan el segmento $\overline{AB}$.

Si M (x, y) es el **PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO** $\overline{AB}$,

$$\boxed{x=\frac{x_2+x_1}{2}}$$

$$\boxed{y=\frac{y_2+y_1}{2}}$$

Estas son las coordenadas del punto medio de un segmento en función de las coordenadas de los extremos.

Distancia entre dos puntos

Dos puntos A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) , se define la DISTANCIA ENTRE A y B como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$$

Actividades

1. **Calcula el punto medio del segmento $\overline{AB}$ determinado por los puntos A(2,-4) y B(-2, 2) .**
2. **Calcula el punto que divide en dos el segmento $\overline{AB}$ determinado por los puntos A(1,3) y B(-2,1).**
3. **Si del segmento $\overline{AB}$ conocemos el punto A(1,-1) y el punto medio del segmento M(2,1). Calcula el punto B.**
4. **Calcula la distancia entre los puntos de los ejercicios anteriores.**

RECTAS: ECUACIONES. PARALELISMO. POSICIONES RELATIVAS

SESIÓN 5

Ecuaciones de la recta

La ecuación de una recta r es una ecuación que verifican todos los puntos de r y ninguno más.

Los elementos característicos de una recta son:

- Un punto: $P\ (p_1, p_2)$ — Ejemplo: $P\ (-5,2)$
- Un vector director: $V(v_1, v_2)$ — Ejemplo: $\vec{v}(4,3)$
- La pendiente: $m = \frac{v_2}{v_1}$ — Ejemplo: $m = \frac{3}{4}$
- Un vector normal: $\vec{n} = (v_2, -v_1)$ — Ejemplo: $\vec{n}\ (3,-4)$

a) **Ecuación vectorial**: $\vec{x} = P + t \cdot \vec{v}; t \in \mathbb{R}$

$$(x,y) = (p_1, p_2) + t \cdot (v_1, v_2); t \in \mathbb{R}$$

b) **Ecuaciones paramétricas**:

Se obtienen de la ecuación vectorial al igualar (o despejar) las componentes x e y.

$$\left.\begin{array}{l} x = p_1 + t\, v_1 \\ y = p_2 + t\, v_2 \end{array}\right\}; t \in \mathbb{R}$$

c) **Ecuación continua**:

Se obtiene de las ecuaciones paramétricas, despejando el parámetro t, e igualando los valores.

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$$

d) **Ecuación general**:

Se obtiene de la ecuación continua, al realizar las operaciones y pasar todos los términos al primer miembro.

$$Ax + By + C = 0$$

Un vector normal es $\vec{n} = (A, B)$

Un vector director es $\vec{v} = (B, -A)$

La pendiente es $m = -\frac{A}{B}$

e) **Ecuación explícita**:

Se obtiene despejando y en la ecuación general $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es la ordenada en el origen.

f) **Ecuación punto - pendiente**:

Es la ecuación de una recta en la que se conoce un punto $A(x_1, y_1)$ y la pendiente m.

$$y = m\,(x - x_1) + y_1$$

g) **Ecuación de la recta que pasa por dos puntos**:

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, se halla el vector director para hallar la pendiente, y luego se aplica la ecuación punto – pendiente.

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 = m\,(x - x_1) + y_1$$

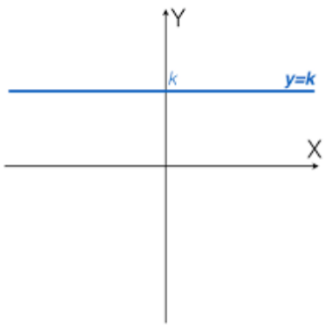
h) **Ecuación de la recta canónica o en forma segmentaria:**

Es la recta de la forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, en la ***p*** es el punto en que la recta corta el eje x, y ***q*** es el punto en que la recta corta el eje y.

SESIÓN 6

Rectas paralelas a los ejes

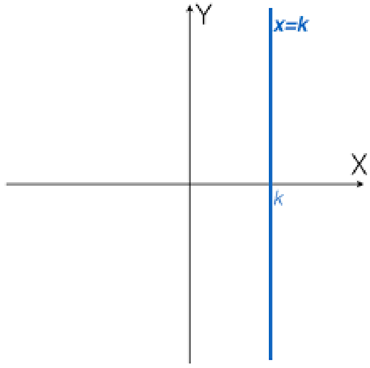
Paralelas al eje x:



- ✓ Son rectas de ecuación y=k.
- ✓ Bastará únicamente conocer un punto por el que pasa para dar su ecuación.
- ✓ Su pendiente es m=0.

Paralelas al eje y:

- ✓ Son rectas de ecuación x=k.
- ✓ Bastará únicamente conocer un punto por el que pasa para dar su ecuación.



Posiciones relativas

Posición relativa entre un punto y una recta

Entre un punto y una recta se pueden dar dos posiciones relativas:

a) El punto está en la recta.

b) El punto no está en la recta.

El punto está en la recta si verifica la ecuación de la recta, y no está en ella si no la verifica.

Ejemplo

Estudia la posición relativa de los puntos A(4, 3), B(1, 4) respecto de la recta: $r \equiv 3x - 2y = 6$

$A(4, 3) \Rightarrow 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 12 - 6 = 6 \Rightarrow A(4, 3) \in r$

$B(1, 4) \Rightarrow 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 3 - 8 = -5 \neq 6 \Rightarrow B(1, 4) \notin r$

Posición relativa entre dos rectas

Estudiar la posición relativa de dos rectas consiste en ver si son secantes, paralelas o coincidentes.

$r \equiv Ax + By + C = 0$

$s \equiv A'x + B'y + C' = 0$

Rectas secantes	Rectas paralelas	Rectas coincidentes
Dos rectas son **secantes** si tienen un único punto en común.	Dos rectas son **paralelas** si no tienen ningún punto en común. Se representa por $\|$	Dos rectas son **coincidentes** si son la misma recta.
Criterio		
Los coeficientes de las variables **no** son proporcionales: $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$	Los coeficientes de las variables son proporcionales y **no** lo son los términos independientes: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$	Los coeficientes de las variables y los términos independientes son proporcionales: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Rectas paralelas y perpendiculares

a) Dos rectas **r** y **s** son paralelas si tienen la misma pendiente: $m_r = m_s$

b) Dos rectas **r** y **t** son perpendiculares si la pendiente de una es la opuesta de la inversa de la otra: $m_r = \frac{v_2}{v_1}$, $m_t = -\frac{v_1}{v_2}$

SESIÓN 7

Ejercicios de tipos de rectas:

1º Encuentra la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta que pasa por los puntos A = (3, 2) y B = (1, –1).
Sol: $(x, y) = (3, 2) + t\cdot(2, 3)$; $\{x = 3 + 2\cdot t; y = 2 + 3\cdot t\}$; $(x – 3)/2 = (y – 2)/3$.

2º Escribe en formas explícita y continua la ecuación de la recta: $2x + 3y = 6$.
Sol: $y = (–2/3)x + 2$; $(x – 3)/3 = y/(–2)$.

3º Dada la recta r: $x + 3y + 2 = 0$, en forma implícita, escribirla en forma explícita, continua y vectorial. **Sol:** $y = (–1/3)x-2/3$; $(x – 1)/3 = (y + 1)/(–1)$; $(x, y) = (1, –1)+ t\cdot(3, –1)$.

4º ¿Cuál es la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos P = (2, 1) y Q = (1, –2). ¿Para qué valores del parámetro se obtienen los puntos P y Q y el punto medio de P y Q?. **Sol:** $\{x = 2 + t; y = 1 + 3\cdot t\}$; $t = 0$; $t = –1$; $t = –1/2$.

5º Dada la recta r: $x + y + 1 = 0$, en forma implícita, escribirla en forma explícita, continua y vectorial. **Sol:** $y = – x – 1$; $(x – 1)/1 = y/(–1)$; $(x, y) = (1, 0)+ t\cdot(1, –1)$.

6º Escribe en forma explícita e implícita la ecuación de la recta $2x + y = 2$.
Sol: $y = – 2x + 2$; $2x + y – 2 = 0$.

7º Escribe la ecuación paramétrica y continua de la recta: $x + 2y = 4$.
Sol: $\{x = – 2\cdot t; y = 2 + t\}$; b) $x/(–2) = (y – 2)/1$

8º
a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(2, 2) y B(0, 4)?
b) Escribe las ecuaciones explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos P(1, 4) y Q(2, 3).

Sol: a) $m = –1$; b) $y = –x + 5$; $x + y – 5 = 0$.

Elementos y características de la recta:

9º ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(0, 1) y B(3, 4)? **Sol:** $m = 1$.

10º ¿Cuál es el vector de dirección y la pendiente de las siguientes rectas?:
a) $y = 3x – 2$. b) $(x – 1)/2 = (y + 2)/4$
Sol: a) $\overline{v} = (1, 3)$; $m = 3$; b) $\overline{v} = (2, 4)$; $m = 2$.

Ejercicios de rectas que pasan por dos puntos:

11º Deduce la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son A(6, 0) y B(0, –2). **Sol:** $x - 3y - 6 = 0$.

12º ¿Pertenece el punto P(3, 3) a la recta que pasa por los puntos A(1, –1) y B(2, 1)? **Sol:** Sí.

13º Determina el valor de k para que los puntos A(2, –1), B(1, 4) y C(k, 9) estén alineados. **Sol:** $k = 0$.

14º Calcula la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el punto P en los casos:

a) $r \equiv \{x = 2 - 3t;\ y = 1 + t\}$ P(3, 1)   b) $r \equiv \frac{(x-1)}{2} = \frac{y}{3}$ P(0, 5)

c) $r \equiv y = 2x - 1$ P(1, 2)   d) $r \equiv 2x - 3y + 2 = 0$ P(0, 0)

Expresar los resultados en forma explicita.

Sol: a) $y = 3x - 8$; b) $y = -\frac{2}{3}x + 5$; c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; d) $y = -\frac{3}{2}x$.

15º Halla la ecuación de s que es perpendicular a $r \equiv x + y - 1 = 0$ y pasa por el punto A(2, 1). **Sol:** $x - y - 1 = 0$.

16º Hallar la ecuación de la recta que pasa por B(3, 1) y es paralela a la que pasa por los puntos A(2, 0) y C(2, –1). **Sol:** $y = 1$.

17º Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $x + y - 1 = 0$ que pasa por el punto A(2, 1). **Sol:** $x - y - 1 = 0$.

18º Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta $x + y - 1 = 0$ en el punto de abscisa 3. **Sol:** $x - y - 5 = 0$.

19º Halla la ecuación de la recta perpendicular al vector $\overline{w}(2, 1)$ y que corta a $y = x - 2$ en el punto de ordenada 3. **Sol:** $2x + y - 13 = 0$

20º Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (2, –1) que es paralela a la que pasa por los puntos (2, 0) y (1, 3). **Sol:** $3x + y - 7 = 0$.

21º Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas:

$2x + 3y + 1 = 0$ $x - y - 2 = 0$

y es perpendicular a la recta $3x + 5y = 15$. **Sol:** Pto corte: (1, –1); $5x - 3y + 5 = 0$.

22º Halla la ecuación de la recta perpendicular a la $3x - 4y + 1 = 0$ que pasa por el punto (1, 0). **Sol:** $4x + 3y - 4 = 0$.

24º Calcula el valor de a y b para que las rectas:

$r_1 \equiv ax - y + 2 = 0$ $r_2 \equiv bx + 6y - 9 = 0$

sean perpendiculares y, además, la segunda pase por el punto P(1, 1). **Sol:** $a = 2$; $b = 3$.