UNIDAD 4

SISTEMAS DE ECUACIONES

CONTENIDOS	RESULTADO DE APRENDIZAJE IMPRESCINDIBLE
○ Ecuaciones con dos incógnitas. ○ Sistemas de ecuaciones. Sistemas equivalentes. Solución de un sistema lineal. ○ Resolución de sistemas de ecuaciones lineales: Método de reducción. Método de sustitución. Método de gráfico. ○ Planteamiento y resolución de problemas mediante la utilización de sistemas valorando la coherencia del resultado. ○ Valoración de la utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.	1. Resuelve y representa las soluciones de una ecuación con dos incógnitas. 2. Maneja los métodos de reducción y sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas e interpretar geométricamente su solución. 3. Resuelve problemas en los que se precise el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones, utilizando diferentes procedimientos, realizando los cálculos necesarios con las herramientas tecnológicas adecuadas y comprobando e interpretando las soluciones obtenidas en el contexto de la situación.

- Ecuaciones con dos incógnitas.
- Sistemas de ecuaciones.

  2.1. Definición.

  2.2. Solución de un sistema lineal.

  2.3. Sistemas equivalentes.

  2.4. Número de soluciones de un sistema de ecuaciones. Clasificación.
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

  3.1. Método de sustitución

  3.2. Método de reducción.

  3.3. Método gráfico.
- Resolución de problemas.

1. ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS.

Recordemos que una **ecuación lineal con una variable** (o incógnita) es una ecuación del tipo $ax + b = 0$ donde x es la incógnita.

Una **ecuación** lineal con dos variables es una ecuación del tipo $ax + by = c$ donde x e y son las incógnitas, a y b son los coeficientes de x e y, respectivamente, y c es el término independiente.

Ejemplo 1: $2\mathrm{x} - \mathrm{y} = 1$ es una ecuación lineal con dos variables x e y. Recordemos que es lineal ya que el grado de cada variable es uno.

Al igual que la solución de una ecuación lineal con una variable es un valor para la incógnita, tenemos que la **solución de una ecuación lineal con dos variables** es un par de valores, (x, y),uno para cada incógnita, que verifica la ecuación.

Una forma sencilla de resolver este tipo de ecuaciones $ax + by = c$ es usando su **representación gráfica**.

Para ello, necesitamos dar los siguientes pasos:

a) Identificar las dos incógnitas: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$

b) Identificar los coeficientes de la $\boldsymbol{x}$yde la $\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$

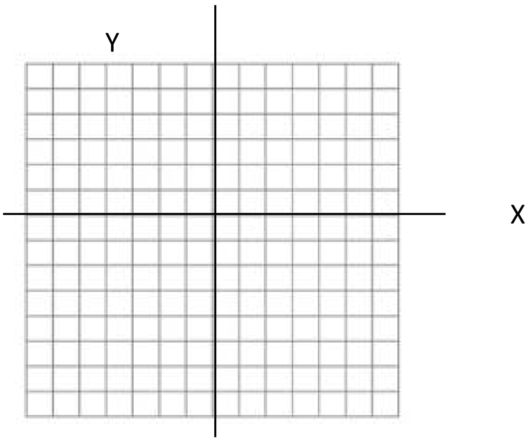
c) Identificar el término independiente: $\boldsymbol{c}$

d) Despejamos una incógnita en función de la otra: normalmente, y en función de x.

e) Dando valores a x obtenemos valores para y. Colocaremos dichos valores en una tabla como la siguiente:

Valores de $\boldsymbol{x}$	x_1	x_2	x_3	....
Valores de $\boldsymbol{y}$	y_1	y_2	y_3	....

f) Construimos los ejes de coordenadas X e Y. (Recuerda colocar bien las unidades, dejando el mismo espacio entre ellas)



g) Sobre los ejes colocamos los puntos que obtenemos en la tabla (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3),…

h) Unimos dichos puntos con una recta. **Cualquier valor de la recta es solución de esa ecuación**.

Ejemplo 2:

Determina si $2x - y = 1$ es una ecuación lineal, y representa gráficamente sus soluciones.

$2x - y = 1 \rightarrow$ Ecuación lineal con dos incógnitas, x e y.

Coeficiente de $x \longrightarrow a = 2$
Coeficiente de $y \longrightarrow b = -1$
Término independiente $\rightarrow c = 1$

El par de valores $x = 0$, $y = -1$ hace cierta la igualdad:

$$2x - y = 1 \xrightarrow{x=0,\ y=-1} 2 \cdot 0 - (-1) = 1 \rightarrow 1 = 1$$

Por tanto, el punto $(0, -1)$ es solución de la ecuación.

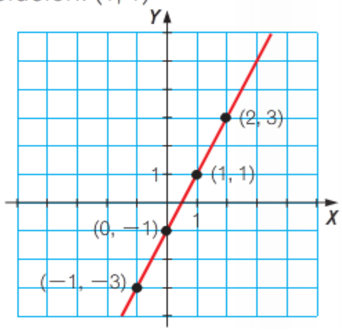
Para obtener otras soluciones despejamos una incógnita: $y = 2x - 1$

Dando valores a x obtenemos valores de y, y estos pares son soluciones.

Si $x = -1 \rightarrow y = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$ Solución: $(-1, -3)$
Si $x = 0 \longrightarrow y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$ Solución: $(0, -1)$
Si $x = 1 \longrightarrow y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ Solución: $(1, 1)$

Y expresándolo en una tabla de valores:

x	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3



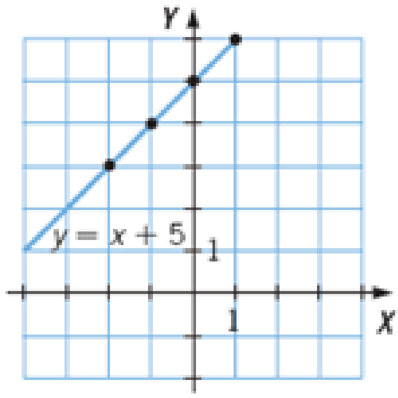
Si asociamos a cada solución el punto del plano que tiene por coordenadas esos valores, obtenemos una recta.

Esta recta está formada por todos los puntos que son solución de $2x - y = 1$.

- *Ejercicio 1:*

- Completa las siguientes tablas para descubrir las soluciones de las ecuaciones.
- Anota los pares de coordenadas de la tabla.
- Traza estos puntos en una cuadrícula de coordenadas y comprueba que todos los puntos se encuentran en una línea.

a) y = x + 5

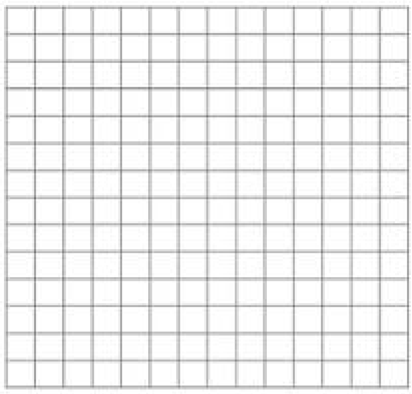


x	-2	-1	0	1	2
y					

b) x + y = 4

x	-2	-1	0	1	2
y					

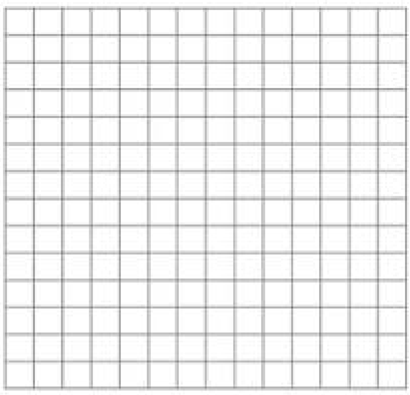
c) y = 3 – x



x	-2	-1	0	1	2
y					

d) x = 5+y

x	-2	-1	0	1	2
y					



- *Ejercicio 2:*Forma una tabla de valores para cada ecuación, e indica algunas soluciones.

a) $3x + 2y = 18$
b) $x - 3y = 20$
c) $x - 7 = y$
d) $2x - 5y = 12$
e) $3x + y = 24$
f) $y = 2x - 1$

x					
y					

x					
y					

x					
y					

x					
y					

x					
y					

x					
y					

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

2.1. Definiciones

Un **sistema de ecuaciones lineales** es una colección de ecuaciones lineales con las mismas variables.

$$\left.\begin{array}{r} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}$$

Ejemplo 3: $\left.\begin{array}{r} 3x-y=2 \\ 2x+3y=11 \end{array}\right\}$ es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

2.2. Solución de un sistema lineal.

Una **solución del sistema** es cualquier par de números (x, y)que hace que las dos ecuaciones sean ciertas.

Resolver un sistema de ecuaciones lineales es buscar una solución que verifique cada ecuación del sistema. (Lo veremos en el apartado 3.)

Ejemplo 4: Sea el sistema de ecuaciones del ejemplo anterior: $\left.\begin{array}{r} 3x-y=2 \\ 2x+3y=11 \end{array}\right\}$

¿Cuáles de los siguientes pares de valores son solución del sistema?

a) $x = 2,\ y = 4$

Veamos si el par$(x, y) = (2,4)$ verifica las dos ecuaciones por separado:

- Primera ecuación: $3 \cdot 2 - 4 = 2$ → luego $(x, y) = (2,4)$ es solución de la primera ecuación
- Segunda ecuación: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16$ →luego $(x, y) = (2,4)$ no es solución de la segunda ecuación.

Luego $(x, y) = (2,4)$ no es una solución del sistema.

b) $x = 4, y = -1$

Veamos si el par$(x, y) = (4, -1)$ verifica las dos ecuaciones por separado:

- Primera ecuación: $3 \cdot 4 - (-1) = 13$ → luego $(x, y) = (4, -1)$ no es solución de la primera ecuación pues para que lo fuera debería ser igual a 2.

Luego $(x, y) = (4, -1)$ no es una solución del sistema porque no verifica la primera ecuación.

- **Ejercicio 3**: Averigua si los siguientes pares son solución del sistema $\left.\begin{array}{r} 3x - y = 2 \\ 2x + 3y = 11 \end{array}\right\}$

  a) x = 1, y = 1

  b) x = 0, y = $-\dfrac{1}{2}$

- **Ejercicio 4**: La solución de un sistema de ecuaciones es $x = 2, y = -1$. Una de las ecuaciones es $2x - y = 5$. ¿Cuál de las siguientes es la otra ecuación?

  a) $4x - 2y = 6$

  b) $4x - 2y = 5$

  c) $-x + 2y = 5$

  d) $-x + 2y = -4$

- **Ejercicio 5**: Encuentra un sistema de ecuaciones que tenga como solución $x = 1, y = -2$.

2.3. Sistemas equivalentes.

Recordemos que **una ecuación es equivalente a otra** si ambas tienen las mismas soluciones.

Ahora veremos una serie de criterios que convierten una ecuación en otra equivalente.

CRITERIOS DE EQUIVALENCIA DE ECUACIONES:

1.Si a los dos miembros de una ecuación se le suma una cantidad, la solución de ambas ecuaciones es la misma.

Ejemplo 5:

$\boldsymbol{2x = 4} \rightarrow \quad x = 2$ y si sumamos 3 a ambos lados de la ecuación, obtenemos otra ecuación $\boldsymbol{2x + 3 = 4 + 3} \rightarrow \quad 2x + 3 = 7 \rightarrow \quad 2x = 7 - 3 \rightarrow \quad 2x = 4$que es la misma que la original y por tanto tendrá la misma solución.

2. Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica o se les divide una misma cantidad, la ecuación es equivalente a la dada.

Ejemplo 6:$\boldsymbol{2x = 4}$ es equivalente a $\boldsymbol{4x = 8}$ pues ambas tienen como solución $x = 2$.

- **Ejercicio 6:** Escribe la ecuación equivalente que resulta cuando ambos miembros de la ecuación…

  a) $3x + 4y = 2$ se les suma 3

b) $x - 4y = 1$ están multiplicados por -2

c) $5x - y = -3$se les resta 5

d) $4x + 2y = -2$ están divididos por -2

e) $-2x - 5y = 1$ están multiplicados por -4

f) $3x - y = -1$ están multiplicados por -1

Decimos que **dos sistemas de ecuaciones son equivalentes** si también dan las mismas soluciones al resolverlos por separado.

Al igual que para buscar ecuaciones equivalentes, veremos una serie de criterios de equivalencia para los sistemas de ecuaciones.

CRITERIOS DE EQUIVALENCIA DE SISTEMAS DE ECUACIONES:

1. Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.

Ejemplo 7:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y + 3 = -6 + 3 \\ 2x + 4y - 5y = 16 - 5y \end{cases}$$

x = 2, y = 3

2. Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de una de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante es equivalente**.**

Ejemplo 8:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 \cdot (3x - 4y) = -6 \cdot 3 \\ \dfrac{2x + 4y}{2} = \dfrac{16}{2} \end{cases}$$

x = 2, y = 3

- **Ejercicio 7**: Encuentra otro sistema de ecuaciones equivalente que no tenga denominadores. $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=5\\ \frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=-1\end{array}\right\}$

3. Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.

Ejemplo 9: $\begin{cases}3x-4y=-6\\ 2x+4y=16\end{cases}$ $\begin{cases}3x-4y=-6\\ 2x+4y+3x-4y=16-6\end{cases}$

x = 2, y = 3

4. Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos, resulta otro sistema equivalente al primero.

Ejemplo 10: $\begin{cases}3x-4y=-6\\ 2x+4y=16\end{cases}$ $\begin{cases}3x-4y=-6\\ \frac{2x+4y}{2}=\frac{16}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}3x-4y=-6\\ x+2y=8\end{cases}$

$\begin{cases}3x-4y+x+2y=-6+8\\ x+2y=8\end{cases}$ $\begin{cases}4x-2y=2\\ x+2y=8\end{cases}$ $x=2,\quad y=3$

5. Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.

Ejemplo 11: $\begin{cases}3x-4y=-6\\ 2x+4y=16\end{cases}$ $\begin{cases}2x+4y=16\\ 3x-4y=-6\end{cases}$ $x=2,\ y=3$

$\begin{cases}3x-4y=-6\\ 2x+4y=16\end{cases}$ $\begin{cases}-4y+3x=-6\\ 4y+2x=16\end{cases}$ $x=2,\ y=3$

2.4. Número de soluciones de un sistema de ecuaciones. Clasificación.

De acuerdo al número de soluciones, los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar como se muestra a continuación.

- Sistema **compatible**, si tiene al menos una solución:
  - **Determinado**, si es un sistema que tiene una solución.
  - **Indeterminado**, si es un sistema que tiene más de una solución.
- Sistema **incompatible**, si no tiene solución.

Podemos conocer el **TIPO DE SISTEMA** o lo que es lo mismo su **CLASIFICACIÓN**, estudiando la relación que existe entre los coeficientes y los términos independientes.

Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales escrito en forma general:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

- Si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, el sistema es compatible determinado.
- Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, el sistema es compatible indeterminado.
- Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, el Sistema es incompatible.

Ejemplo 12:

Completa estos sistemas para que el primero tenga la solución $x = 6$ e $y = -1$, el segundo sea incompatible y el tercero sea indeterminado.

a)$\begin{cases} x - 4y = c \\ 2x + b'y = 13 \end{cases}$ b)$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = c' \end{cases}$ c)$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + b'y = c' \end{cases}$

a) Para que el sistema tenga solución, en este caso queremos que sea $x = 6$ e $y = -1$, tenemos que ver que se cumple la condición $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

$\frac{1}{2} \neq \frac{4}{b'} \to 1 \cdot b' \neq 4 \cdot 2 \to b' \neq 8$, luego, si $b' \neq 8$ el sistema será compatible determinado.

Queremos que tenga solución $x = 6$ e $y = -1$, para ello, lo sustituimos en cada ecuación

En la primera ecuación: $x - 4y = c \to 6 - 4 \cdot (-1) = 10 \to c = 10$

En la segunda ecuación: $2x + b' = 13 \to 2 \cdot 6 + b' = 13 \to 12 + b' = 13 \to b' = 13 - 12 \to$
$\to b' = 1$

b) Para que el sistema sea incompatible, ha de verificarse la condición $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{8}{c'} \to \frac{1}{2} \neq \frac{8}{c'} \to 1 \cdot c' \neq 8 \cdot 2 = 16 \to c' \neq 16$ luego si $c' \neq 16$ el sistema es incompatible.

c) Para que el sistema sea compatible indeterminado, ha de verificarse la condición $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

$\frac{2}{4} = \frac{1}{b'} = \frac{8}{c'} \rightarrow \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{b'} \\ \frac{2}{4} = \frac{8}{c'} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2b' = 4 \rightarrow b' = 2 \\ 2c' = 32 \rightarrow c' = 16 \end{cases}$ luego, si $b' = 2$ y $c' = 16$ se tiene que el sistema es compatible indeterminado.

- **Ejercicio 8:** Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, escribe el número de soluciones que tiene cada uno sin resolverlos.

  a) $\left.\begin{matrix} 2x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$ c) $\left.\begin{matrix} 3x + 4y = 8 \\ 6x + 8y = 16 \end{matrix}\right\}$

  b) $\left.\begin{matrix} 2x + 10y = 4 \\ x + 5y = 4 \end{matrix}\right\}$ d) $\left.\begin{matrix} 3x + 2y = 1 \\ x - 8y = 5 \end{matrix}\right\}$

- **Ejercicio 9**: Completa el sistema de ecuaciones para que tenga como solución x = 2, y = -3.

  $$\left.\begin{matrix} 3x - 5y = [\quad] \\ [\quad]x + 4y = 2 \end{matrix}\right\}$$

- Ejercicio 10: Completa el sistema de ecuaciones para que tenga como solución x = -3, y = 2.

  $$\left.\begin{matrix} -2x + [\quad]\,y = 8 \\ [\quad]x - 2y = -7 \end{matrix}\right\}$$

- Ejercicio 11: Completa el sistema de ecuaciones para que sea compatible

  a) $\left.\begin{matrix} 3x - 2y = [\quad] \\ [\quad]x + 2y = 6 \end{matrix}\right\}$

  b) $\left.\begin{matrix} [\quad]x + 2y = 3 \\ 2x + [\quad]y = [\quad] \end{matrix}\right\}$

- Ejercicio 12: Completa el sistema de ecuaciones para que sea compatible determinado

  a) $\left.\begin{matrix} [\quad]x - 5y = [\quad] \\ 2x + [\quad]y = 6 \end{matrix}\right\}$

  b) $\left.\begin{matrix} 2x + [\quad]y = 10 \\ [\quad]x + [\quad]y = 12 \end{matrix}\right\}$

3. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

3.1. Método de sustitución.

El método de sustitución es utilizado cuando cualquiera de las incógnitas, x ó y, está expresado en función de la otra. En este caso, sustituimos la expresión de esta variable en la otra ecuación.

Ejemplo:

Sustitución

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ x + 2(4 - 2x) = 5 \end{cases}$$

$$x + 2(4 - 2x) = 5 \rightarrow x + 8 - 4x = 5$$
$$\rightarrow -3x = -3 \rightarrow x = 1$$
$$2(1) + y = 4 \rightarrow y = 2$$

Ejemplo 13:

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x + 7y = 11 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$ Sol:

$$\begin{cases} x + 7y = 11 \rightarrow x = 11 - 7y \\ 3x - 5y = 7 \rightarrow 3(11 - 7y) - 5y = 7 \rightarrow 33 - 21y - 5y = 7 \rightarrow -26y = -26 \end{cases}$$
$$y = 1 \rightarrow x = 11 - 7(1) = 4$$
$$\text{sol} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$ Sol:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \rightarrow y = 7 - 2x \\ 3x + 4y = 13 \rightarrow 3x + 4(7 - 2x) = 13 \rightarrow 3x + 28 - 8x = 13 \rightarrow -5x = -15 \end{cases}$$
$$x = 3 \rightarrow y = 7 - 2(3) = 1$$
$$\text{sol} \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

- **Ejercicio 13**: Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de sustitución.

a $x = 8 - 2y$ $2x + 3y = 13$	**b** $y = 4 + x$ $5x - 3y = 0$	**c** $x = -10 - 2y$ $3y - 2x = -22$
d $x = -1 + 2y$ $x = 9 - 2y$	**e** $3x - 2y = 8$ $x = 3y + 12$	**f** $x + 2y = 8$ $y = 7 - 2x$

- **Ejercicio 14:** Resuelve por sustitución: y = 3x + 1 e y = 3x +4. ¿Cuál es la solución del sistema?

- **Ejercicio 15:** Resuelve por sustitución: y = 3x +1 e 2y = 6x + 2. ¿Cuál es la solución del sistema?

3.2. Método de reducción.

En muchos problemas que requieren resolver Sistemas de ecuaciones lineales, cada ecuación está escrita de la forma $ax + by = c$. Resolverlo por sustitución es a menudo tedioso y es preferible utilizar el método de eliminación o reducción.

En este método, expresamos los coeficiente de la variable x (o y) del mismo valor absoluto, pero de signo contrario para después sumar las ecuaciones. Esto provoca la eliminación o reducción de una variable.

El método de eliminación o reducción utiliza el hecho de que si *a = b y c = d entonces*

a + c = =b + d.

En situaciones donde los coeficientes no tienen el mismo valor absoluto y distinto signo, debemos primero multiplicar cada ecuación por un número, a conveniencia.

Siempre existe una elección para reducir x ó y, por lo que nuestra elección depende de qué variable es más sencillo reducir.

Ejemplo 14:

Reducción

$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

$$5x \quad = 15 \rightarrow x = 3$$

$$2(3) + 5y = 11 \rightarrow 5y = 5 \rightarrow y = 1$$

Ejemplo 15:

Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción:

- **Ejercicio 16:** ¿Qué ecuación resulta si sumamos los siguientes pares de ecuaciones verticalmente?

a $5x + 3y = 12$
$x - 3y = -6$

b $2x + 5y = -4$
$-2x - 6y = 12$

c $4x - 6y = 9$
$x + 6y = -2$

d $12x + 15y = 33$
$-18x - 15y = -63$

e $5x + 6y = 12$
$-5x + 2y = -8$

f $-7x + y = -5$
$7x - 3y = -11$

- **Ejercicio 17:** Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.

sol $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

a $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 6x - 3y = -27 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ -2x - 7y = -20 \end{cases}$

d $\begin{cases} 3x + 5y = -11 \\ -3x - 2y = 8 \end{cases}$ **e** $\begin{cases} 4x - 7y = 41 \\ 3x + 7y = -6 \end{cases}$ **f** $\begin{cases} -4x + 3y = -25 \\ 4x - 5y = 31 \end{cases}$

- **Ejercicio 18:** Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.

a $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ x + 4y = 36 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$

d $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ **e** $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 6x + 7y = 32 \end{cases}$ **f** $\begin{cases} 7x - 3y = 29 \\ 3x + 4y + 14 = 0 \end{cases}$

g $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$ **h** $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 4x + 3y = 19 \end{cases}$ **i** $\begin{cases} 3x + 4y + 11 = 0 \\ 5x + 6y + 7 = 0 \end{cases}$

- **Ejercicio 19:** Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción. Comenta el resultado obtenido.

a $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 6x + 2y = 16 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 4x + 10y = -1 \end{cases}$

3.3. Método gráfico.

Una forma de resolver un sistema de ecuaciones es dibujar las líneas rectas que determinan las soluciones de las ecuaciones y encontrar la intersección de estas rectas. Este método es llamado **método gráfico de resolución de un sistema**.

Ejemplo 17:

Resuelve gráficamente el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{array}\right\}$

Expresamos las soluciones de estas ecuaciones mediante tablas.
Para ello, despejamos y en ambas ecuaciones y damos valores a x.

$x + y = 3 \rightarrow y = 3 - x$

x	-3	-2	-1	0	**1**	2	3	4	...
y	6	5	4	3	**2**	1	0	-1	...

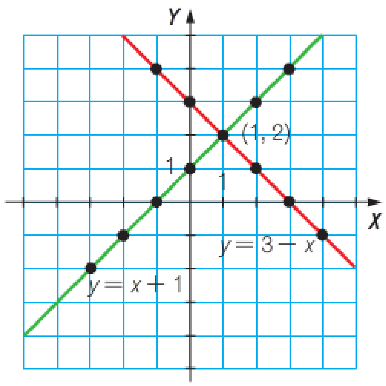
$x - y = -1 \rightarrow y = x + 1$

x	-3	-2	-1	0	**1**	2	3	4	...
y	-2	-1	0	1	**2**	3	4	5	...

La única solución que se repite en ambas ecuaciones es la formada por el par $x = 1$, $y = 2$. Decimos entonces que el par $x = 1$, $y = 2$ es la solución del sistema.

Representando gráficamente estos puntos y uniéndolos, obtenemos las dos rectas que representan las soluciones de cada ecuación.

Estas rectas se cortan en un solo punto, (1, 2), que es la solución del sistema.



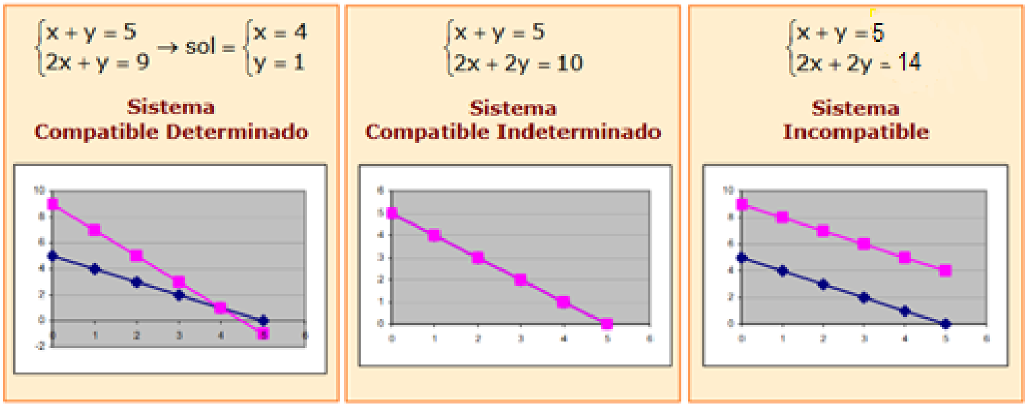
También utilizando el método gráfico podemos <u>observar qué tipo de sistema es según la posición que tengan las rectas</u> de las ecuaciones del sistema.

- Si las dos rectas se cortan en un punto, es decir, sólo hay una solución, el sistema es compatible determinado.

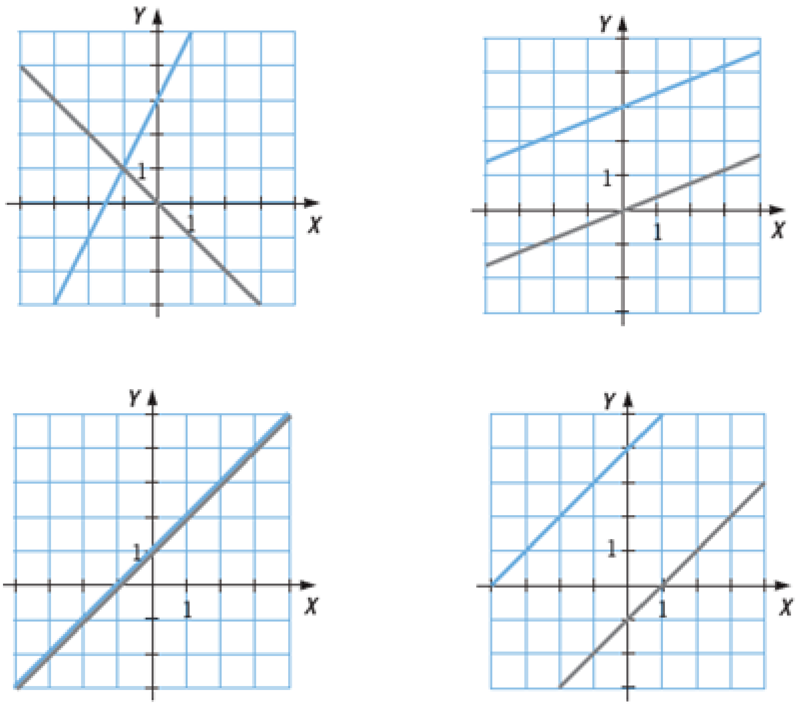
- Si las dos ecuaciones son equivalentes, es decir, una es múltiplo de la otra, con lo cual obtenemos dos rectas "coincidentes", cualquier punto que esté en esa recta va a ser solución del sistema, con lo cual, tendremos infinitas soluciones y por tanto el sistema será compatible indeterminado.

- Si al representar las dos rectas de las ecuaciones, éstas no se cortan en ningún punto entonces se dice que el sistema no tiene solución y por tanto es un sistema incompatible.

Ejemplo 18:



➢ **Ejercicio 20:** Escribe qué tipo de sistema de ecuaciones es, según el número de soluciones que tiene.



- **Ejercicio 21:** Escribe una ecuación lineal con dos incógnitas que forme un sistema de ecuaciones con la ecuación $3x - 2y = 4$, cumpliendo que el sistema:

  a) Tenga una única solución.

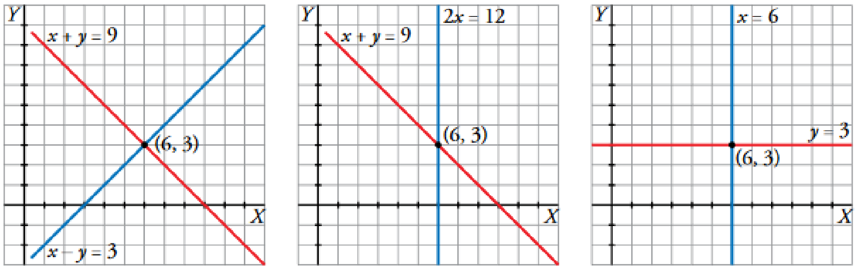
  b) Tenga infinitas soluciones.

  c) No tenga solución.

Ejemplo 19:

Representa estos tres sistemas equivalentes que se obtienen para resolver el primero de ellos:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 9 \\ 2x \quad\;\; = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

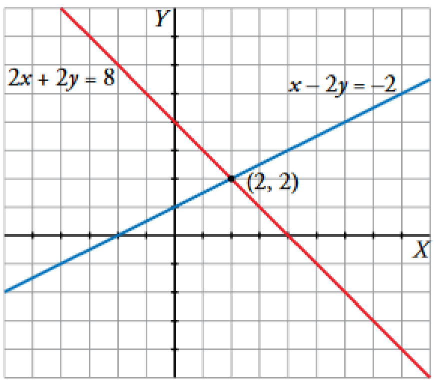


Ejemplo 20:

Representa los pares de rectas correspondientes a cada sistema y di si son equivalentes:

a) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y - x = 0 \\ y \quad\;\; = 2 \end{cases}$

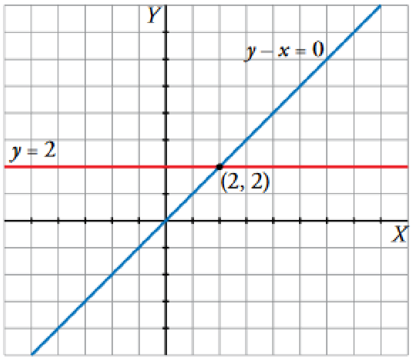
a) $\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$



Punto en común: (2, 2)

Solución del sistema: $x = 2,\; y = 2$

b) $\begin{cases} y - x = 0 \\ y \quad\;\; = 2 \end{cases}$



Punto en común: (2, 2)

Solución del sistema: $x = 2,\ y = 2$

Los dos sistemas de ecuaciones tienen la misma solución. Por tanto, son equivalentes.

- **Ejercicio 22:** Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones. ¿Qué tipo de sistema de ecuaciones es, según el número de soluciones que tiene?

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 3x - 4y = 2 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ 6x + 3y = 6 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 2 \\ 3x - 4y = -2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = 1 \\ 4x + y = 11 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{array}\right\}$

4. Resolución de problemas.

Muchas situaciones pueden ser descritas matemáticamente como un par de ecuaciones lineales, es decir, dos ecuaciones de la forma $ax + by = c$, donde x e y son dos variables o dos cantidades desconocidas.

Una vez que se consiguen las ecuaciones, el sistema puede ser resuelto.

Se recomienda seguir el siguiente método.

Paso 1	Identifica las incógnitas y asigna una variable para representarlas, x e y, por ejemplo. No olvides las unidades en que deben estar representadas.

Paso 2	Traduce el texto del problema a dos ecuaciones y comprueba que la traducción es correcta.
Paso 3	Resuelve el sistema de ecuaciones
Paso 4	Comprueba que la solución encontrada satisface el problema enunciado.
Paso 5	Escribe la respuesta en una frase.

*Ejemplo 21:*La suma de las edades de un padre y de su hijo es 39 y su diferencia es 25, ¿cuál es la edad de cada uno?

Paso 1	Llamamos x a la edad del padre e y a la edad del hijo
Paso 2	La suma de las edades es 39: $x + y = 39$ La diferencia de las edades es 25:$x - y = 25$
Paso 3	El sistema es $\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases}$ Resolvemos el sistema por el método de reducción sumando ambas ecuaciones verticalmente: $+ \begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases}$ $2x = 64 \rightarrow x = \frac{64}{2} = 32$ Sustituimos el valor $x = 32$ en cualquiera de las ecuaciones del sistema: $32 + y = 39 \rightarrow y = 39 - 32 = 7$ Luego las soluciones son $x = 32$ e $y = 7$
Paso 4	$\begin{cases} 32 + 7 = 39 \\ 32 - 7 = 25 \end{cases}$
Paso 5	El padre tiene 32 años y el hijo 7 años.

Ejemplo 22: Una parcela rectangular tiene un perímetro de 320 m. Si mide el triple de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones de la parcela?

Paso 1	Llamamos x al ancho e y al largo de la parcela
Paso 2	El largo es el triple que el ancho: $y = 3x$ El perímetro es 320: $2x + 2y = 320$
Paso 3	El sistema es $\begin{cases} y = 3x \\ 2x + 2y = 320 \end{cases}$ Resolvemos el sistema por el método de sustitución, sustituyendo $y = 3x$ en la segunda

	ecuación: $$2x + 2 \cdot (3x) = 320 \rightarrow 2x + 6x = 320 \rightarrow 8x = 320 \rightarrow x = \frac{320}{8} = 40$$ Como $x = 40$ e $y = 3x$, se tiene que $y = 3 \cdot 40 = 120$ Luego las soluciones son $x = 40$ e $y = 120$
Paso 4	$\begin{cases} y = 3 \cdot 120 = 360 \\ 2 \cdot 40 + 2 \cdot 120 = 320 \end{cases}$
Paso 5	La parcela tiene 40 m de ancho y 120 m de largo.

- **Ejercicio 23:** Siete caramelos y tres chocolatinas cuestan 10,08 €, y 4 caramelos y 5 chocolatinas cuestan 9,9 €. Encuentra el precio de un caramelo y de una chocolatina.
- **Ejercicio 24:** Ana y Miguel tienen 29.40€ entre los dos. Ana tiene las tres cuartas partes del dinero que tiene Miguel. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?
- **Ejercicio 25:** La suma de dos números es 47 y su diferencia es 14. ¿De qué números se trata?
- **Ejercicio 26:** Encuentra dos números cuya diferencia sea 3 y su media aritmética sea 5.
- **Ejercicio 27:** El mayor de dos números es 4 veces el menor, y su suma es 85. Encuentra los números que cumplen estas condiciones.
- **Ejercicio 28:** En una librería, dos lápices y tres bolígrafos cuestan un total de 9,28 €, y siete lápices y tres bolígrafos cuestan 7,16 €. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
- **Ejercicio 29:** Tengo monedas de 50 céntimos y de un euro en mi monedero. Hay 43 monedas en total, y su valor total es de 35 €. ¿Cuántas monedas tengo de cada tipo?
- **Ejercicio 30:** La margarina se vende en paquetes de 250 g y 400 g. Un hotel ha realizado un pedido de 19,6 kg y ha recibido 58 paquetes de margarina. ¿Cuántos paquetes de margarina de cada tipo ha recibido el hotel?
- **Ejercicio 31:** Un rectángulo tiene un perímetro de 32 cm. Si acortamos 3 cm la longitud del rectángulo y añadimos 3 cm a la anchura, el rectángulo se ha convertido en un cuadrado. Encuentra las dimensiones del rectángulo original.