Matemáticas Académicas 3ºESO

Unidad 1

LOS NÚMEROS
Y SU UTILIDAD

CONTENIDOS DE LA UNIDAD	RESULTADO DE APRENDIZAJE IMPRESCINDIBLE
○ Los números racionales. Operaciones. ○ Interpretación y uso de los números decimales y las fracciones: Comparación, ordenación y representación de los mismos en la recta numérica. Aproximación. Cifras significativas. Error absoluto y relativo. ○ Clasificación de los diferentes tipos de números. Decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz. ○ Potencias de exponente entero. Notación científica. Expresión con notación científica los números muy grandes y muy pequeños a partir del conocimiento, significado y uso de potencias de exponente entero. Operaciones con números expresados en notación científica con el apoyo de la calculadora. ○ Introducción a los radicales. Simplificación de expresiones sencillas con raíces cuadradas no exactas. ○ Resolución de problemas de la vida cotidiana, mediante la utilización de aproximaciones y redondeos, expresando los resultados con la precisión y unidades requeridas por la situación planteada.	1. Conoce y utiliza los números racionales y hace operaciones con ellos conociendo su significado, sus propiedades y aplicándolas correctamente cuando sea preciso. 2. Identifica los distintos tipos de decimales que se pueden obtener dividiendo dos números enteros. 3. Calcula potencias de exponente entero y base racional y aplica las propiedades para simplificarlas. 4. Expresa con notación científica números muy grandes y muy pequeños y opera con ellos, con y sin calculadora, y los utiliza en problemas contextualizados. 5. Aplica adecuadamente técnicas de truncamiento y redondeo en problemas contextualizados, reconociendo los errores de aproximación en cada caso para determinar el procedimiento más adecuado.

INDICE DE CONTENIDOS

Para comenzar…

EL PAPEL. Para conseguir un paquete de papel es necesario un tronco de unos 90 cm de alto y 20 cm de diámetro. Si el papel es reciclado, se consume $\frac{3}{5}$ de la energía y $\frac{3}{7}$ del agua necesaria para producir papel nuevo.

Para fabricar una tonelada de papel se requieren 15 m^3 de agua dulce y 9600 kWh de electricidad (unas tres veces más la electricidad que consume una familia media en un año). ¿Qué cantidad de agua y electricidad se ahorraría si el papel fuese reciclado?

1. NÚMEROS RACIONALES

*El **conjunto de los números racionales** es el formado por todos aquellos números que se pueden escribir como **fracciones**, es decir como cociente de números enteros con denominador no nulo.*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z} , b \neq 0 \right\}$$

$$\frac{a}{b}$$

***b* denominador:** *indica en cuántas partes iguales dividimos la unidad.*

***a* numerador:** *indica cuántas de esas partes tomamos.*

***Qué tipo de números son los racionales**:*

Los números naturales, los números enteros y algunos números decimales:

Los números decimales exactos (tienen una cantidad finita de cifras decimales)

Los números decimales periódicos puros (una cifra, o un grupo de ellas se repite indefinidamente desde el inicio de la coma)

Los números decimales periódicos mixtos (una cifra, o un grupo de ellas se repite indefinidamente no inmediatamente después de la coma)

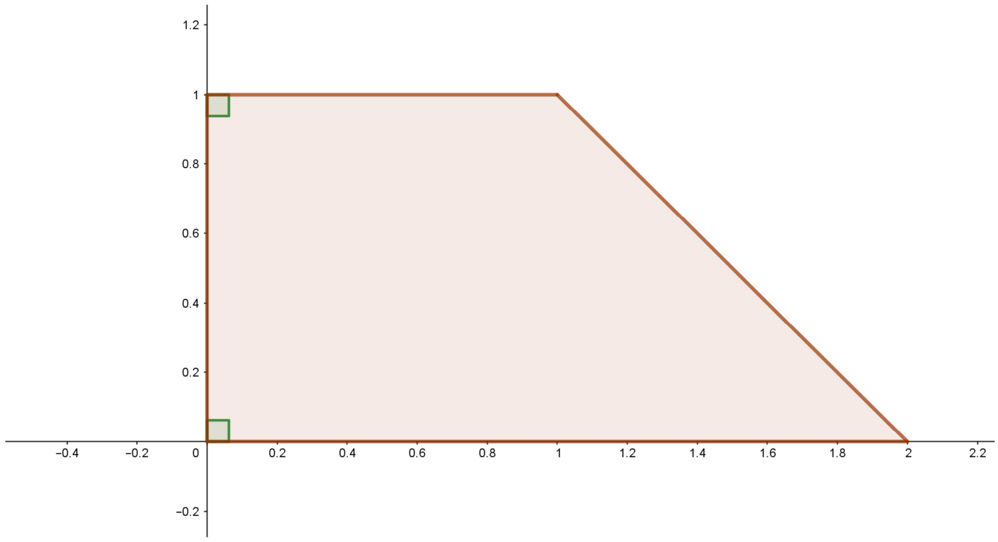
1. Los siguientes números racionales están expresados en forma de fracción. Escríbelos en forma decimal. Señala además qué tipo de número racional obtienes e cada caso.

$$\frac{24}{3}, \quad \frac{-8}{10}, \quad \frac{25}{6}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{-42}{2}$$

2. Calcula la fracción del número:

a) $\frac{3}{5}$ de 35 b) $\frac{7}{2}$ de 120 c) $\frac{1}{4}$ de 340

3. ¿Puedes dividir la siguiente figura (situada en los ejes coordenados) en cuatro partes iguales y tomar $\frac{3}{4}$? Inténtalo



1.1. FRACCIONES EQUIVALENTES. FRACCIÓN IRREDUCIBLE.

Dos fracciones son equivalentes si representan el mismo número racional.
Cómo obtener fracciones equivalentes:

Dada una fracción podemos obtener fracciones equivalentes de dos modos:
Multiplicando numerador y denominador por el mismo número. AMPLIAR
Dividiendo numerador y denominador por el mismo número. SIMPLIFICAR

Dos fracciones son equivalentes si cumplen la siguiente condición: $\mathbf{\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Longleftrightarrow a \cdot y = b \cdot x}$

Un número racional se puede representar por distintas fracciones, todas ellas equivalentes entre sí. Una de esas fracciones que representan el número racional no se puede simplificar, y se llama **FRACCIÓN IRREDUCIBLE.**

4. Amplifica para obtener tres fracciones equivalentes a cada una de las dadas: a) $\frac{5}{3}$ b) $-\frac{2}{7}$

5. Simplifica en cada caso hasta obtener la fracción irreducible: $a)$ $\frac{48}{36}$ *b)* $\frac{-120}{160}$

6. Utiliza tu calculadora para comprobar de tres maneras distintas si los siguientes pares de fracciones son equivalentes y escribe cada estrategia utilizada:
   $a)$ $\frac{8}{50}$ *y* $\frac{-12}{-75}$ *b)* $-\frac{24}{16}$ *y* $\frac{-3}{2}$

7. Marta gastó $\frac{18}{40}$ de su hucha, Carlos $\frac{3}{8}$ e Isabel $\frac{10}{25}$, ¿quién o quiénes gastaron una proporción menor?

8. Encuentra un número racional comprendido entre $\frac{5}{9}$ *y* $\frac{7}{11}$, y encuentra otro número racional comprendido entre $-\frac{5}{9}$ y $\frac{-7}{12}$.

1.2. REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES EN LA RECTA NUMÉRICA

Recuerda que **los números enteros** se representan en la recta de la siguiente manera:

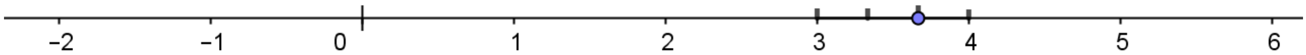
Para representar **otros números racionales** se puede usar la fracción mixta, es decir conocer la parte entera que tiene el número racional y la fracción correspondiente a la parte decimal. Veamos:

Ejemplo. Representar $\frac{11}{3}$:

$\frac{11}{3}$ *= 3,6666… lo que significa que en la recta nuestra fracción está entre el 3 y el 4*

$$\frac{11}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \qquad \boxed{3 + \frac{2}{3}}$$

concretamente tenemos que añadir $\frac{2}{3}$ al 3 veamos



*Recuerda que la **fracción mixta** se puede calcular fácilmente con la división entera, es decir la división que efectuamos sin obtener decimales:*

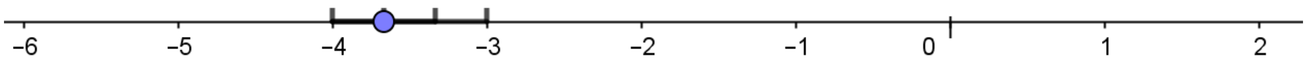
11 |3 → 11 |3
2 3

3 unidades enteras y sobran dos a dividir entre tres otra vez, es decir $\frac{2}{3}$

Los números racionales en la recta quedan representados de menor a mayor, es decir, cuanto más pequeño más a la izquierda. Lo que significa por ejemplo que se cumple:

$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \frac{11}{3} < 4$$

Si tuviéramos que representar $\frac{-11}{3}$ sería lo mismo pero negativo -(3 + $\frac{2}{3}$)



9. Calcula la fracción mixta para los siguientes números racionales:

$$\frac{8}{5}, \quad \frac{19}{2}, \quad \frac{9}{4}, \quad -\frac{5}{2}$$

10. Representa gráficamente los siguientes números racionales y después ordénalos de menor a mayor con la notación adecuada:

$$\frac{13}{5} \; ; \; -\frac{7}{4} \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{2}{3} \; ; \; -2 \; ; \; -\frac{5}{6} \; ; \; 1$$

1.3. SUMA Y RESTA DE NÚMEROS RACIONALES

Para sumar y restar números racionales utilizamos su expresión fraccionaria. Para efectuar las sumas y restas de fracciones necesitamos reducir a común denominador, lo que significa conseguir fracciones equivalentes a las implicadas pero que tengan el mismo denominador.

Ejemplo: $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}= \frac{8}{12}-\frac{15}{12}= \frac{-7}{12}$

Observa:

$\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{8}{12}$, su valor decimal es 0,66666…… $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}=$ *0,6666…..*

$\frac{5}{4}$ es equivalente a $\frac{15}{12}$, su valor decimal es 1,25 $\frac{5}{4}=\frac{15}{12}$ *= 1,25*

Es decir, simplemente hemos cambiado los representantes de los números racionales 0,66666…. y 1,25 para poder restarlos.

Para reducir a común denominador de manera más simple utilizamos el mínimo común múltiplo de los denominadores como el nuevo denominador común.
Después de efectuar la suma o resta comprobamos si podemos simplificar la fracción resultante.

11. Averigua el valor de x:

a) $\frac{2}{3}=\frac{x}{12}$ b) $\frac{4}{5}=\frac{x}{20}$ c) $\frac{x}{9}=\frac{8}{6}$ d) $\frac{5}{4}=\frac{20}{x}$

12. Realiza las siguientes operaciones indicando todos los pasos intermedios:

a) $\frac{4}{5}+\frac{17}{20}$ b) $\frac{20}{4}-\frac{7}{6}$ c) $\frac{-5}{7}+\frac{8}{3}$ d) $\frac{13}{18}-\frac{11}{12}$ e) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{7}{5}$

13. Una deuda se ha abonado en tres plazos. En el primero se han pagado los tres séptimos, en el segundo la quinta parte y en el tercero el resto.

a) ¿Qué fracción de la deuda se abonó en el tercer plazo?
b) Si la deuda es de 20000 €, ¿qué cantidad se ha pagado en el tercer plazo?

14. Realiza las siguientes operaciones:

a) $3+\frac{5}{2}$ $b)\ 6-\frac{7}{10}$ c) $-1+\frac{1}{3}$ d) $5+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ e) $\frac{11}{12}-1$

1.4. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

Multiplicar nos resulta más fácil que dividir. Recuerda que para operar con fracciones:

Multiplicamos → en paralelo

Dividimos → multiplicando en doble cruz

Ejemplos: Multiplicación: $\frac{7}{4} \cdot \frac{10}{3} = \frac{70}{12}$ *(y siempre que sea posible simplificamos)* $= \frac{35}{6}$

División: $\frac{7}{4} : \frac{10}{3} = \frac{21}{40}$

Recuerda: La **fracción de una fracción** se resuelve multiplicando las fracciones.

Ejemplo: $\frac{6}{7}$ *de* $\frac{11}{4} = \frac{66}{28}$ *(simplificando)* $= \frac{33}{14}$

15. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones con fracciones:

a) $\frac{6}{7} \cdot \frac{5}{3} =$ b) $\frac{1}{2} : \frac{2}{13} =$ c) $\frac{7}{8} : \frac{21}{4} =$ d) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{8} =$

e) $\frac{27}{5} : 9$ f) $5 \cdot \frac{19}{100} =$ g) $4 : \frac{3}{4} =$ h) $\frac{3}{7} : \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{4} =$

16. ¿Cuántas botellas de $\frac{3}{4}$ de litro se pueden llenar con una garrafa de 50 litros?

17. A Luis le encanta cocinar, usa cinco séptimos de kilo de harina para elaborar una torta, ¿cuántos kilos necesitará para elaborar cuatro tortas y media?

18. Álvaro dona $\frac{1}{9}$ de su sueldo, ahorra $\frac{2}{5}$ del resto, y lo demás lo gasta. Si se gasta 600 € ¿Cuánto dinero cobra?

19. El 22% de los jóvenes españoles ni estudia ni trabaja. Si hay aproximadamente 7,11 millones de jóvenes de entre 15 y 24 años, ¿qué cantidad de jóvenes no estudia ni trabaja?

1.5. JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

La jerarquía de las operaciones es el orden en el que se deben efectuar las operaciones cuando tenemos una expresión con varias de ellas.
Es necesario tener un acuerdo de este orden para que el significado de una expresión sea para todos el mismo.

Veamos un ejemplo:

$$4 + \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}$$

Quedamos de acuerdo en que las multiplicaciones se realizan antes que las sumas por lo que $4 + \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = 4 + \frac{18}{20}$ *(simplificando)=* $4 + \frac{9}{10}$ *(sumando)=* $\frac{40+9}{10} = \frac{49}{10}$ *(si pasamos a decimal)= 4,9*
Si no tuviéramos este acuerdo y realizáramos la suma primero, puedes comprobar que se obtendría 5,7.
Al acordar hacer las sumas antes que las multiplicaciones, nos ahorramos escribir en este caso un paréntesis $4 + (\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5})$ *que nos indica la o las operaciones prioritarias.*

JERARQUÍA:

Nivel 1	***CORCHETES Y PARÉNTESIS***	***Si hay varias operaciones de un nivel las realizamos en general de izquierda a derecha***
Nivel 2	***POTENCIAS Y RAÍCES***	
Nivel 3	***MULTIPLICACIONES Y DIVISIONES***	
Nivel 4	***SUMAS Y RESTAS***	

Nota1: Los paréntesis que solo se usan para separar signos no participan en esta jerarquía.

Nota2: Si tenemos una **barra de fracción** y hay operaciones en el numerador y en el denominador, es como si tuviéramos arriba un paréntesis y abajo otro, es decir, hay que resolver el numerador y el denominador primero.

Ejemplo a):

$1-3\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\right)$ *primero el paréntesis, lo que nos obliga a realizar una resta en primer lugar*

$=1-3\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{4}\right)=1-3\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)$ *aquí quedan unos paréntesis de signo, no hay ninguna operación dentro, las operaciones que nos quedan por realizar son una resta y una multiplicación, luego por la jerarquía sabemos que debemos operar primero la multiplicación*

$=1+\frac{3}{4}$ *y después la resta que por los signos se transformó en suma*

$=\frac{4+3}{4}=\frac{7}{4}$

Ejemplo b)

$-\frac{21}{5}:\frac{9}{10}-\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}$ *Primero la división y luego la multiplicación*

$=-\frac{210}{45}-\frac{18}{20}$ *Simplificamos a cada paso si podemos para que sea más sencillo*

$=-\frac{14}{3}-\frac{9}{10}$ *Ahora la resta*

$=\frac{-140-27}{30}=\frac{-167}{30}$ *Hemos terminado pues es una fracción irreducible*

Ejemplo c) :

$$\frac{1+\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{11}{4}}=\frac{3}{2}:\frac{11}{4}=\frac{12}{22}=\frac{6}{11}$$

20. Practica: Resuelve las siguientes operaciones combinadas:

a) $\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)$ b) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)$ $d)$ $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}$

$e)\ \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}{\frac{-7}{8}-6}$ f) $5+4\cdot\left(\frac{11}{21}-\frac{3}{14}\right)$ g) $\frac{9}{20}:\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}$

2. APROXIMACIÓN. CIFRAS SIGNIFICATIVAS. ERROR ABSOLUTO Y ERROR RELATIVO.

Al manejar números racionales, a veces nos encontramos con números con muchas, incluso infinitas, cifras decimales. Por esto se hace necesario usar aproximaciones.

Una **aproximación** de un número racional es otro número racional, que está cerca de él y que tiene "pocas" cifras significativas, generalmente entre 1 y 3, y distintas de cero.

Las aproximaciones a un número pueden ser **por exceso** (el valor aproximado es mayor que el real) o **por defecto** (el valor aproximado es menor que el real)

La distancia, es decir, lo que separa al valor real del valor aproximado es lo que se conoce como error absoluto de la aproximación.

Error absoluto: es el valor absoluto de la diferencia entre el valor real y el valor aproximado.

$$\mathbf{E_A = |V_R - V_A|}$$

Dependiendo del problema nos puede interesar aproximar por exceso o por defecto, y si nos da igual, se debe utilizar la aproximación por redondeo

REGLAS BÁSICAS DE REDONDEO:

A. Si ***la cifra a la derecha de la última cifra requerida es menor que 5****, se deja la cifra precedente igual.*

Ejemplo*: Se requiere redondear 48,682 a dos decimales, entonces, como 2 es menor que 5, se tiene, 48,68.*

B. Si ***la cifra a la derecha de la última cifra requerida es mayor o igual que 5****, se suma 1 a la cifra precedente.*

Ejemplo*: Se requiere redondear 187,69 a un decimal, entonces, como 9 es mayor que 5, se tiene, 187,7.*

En los problemas nos interesa saber la **importancia que tiene el error cometido**, es decir, no es lo mismo cometer un error de 1 metro midiendo la distancia entre dos ciudades que cometer un error de 1 metro al medir el largo de una habitación.

Para identificar esa importancia en problemas más complejos se utiliza el error relativo.

<u>Error relativo:</u> Cociente entre el error absoluto cometido y el valor real. $E_R = \frac{E_A}{V_R}$

Ejemplo: La distancia entre Gijón y Madrid por un determinado recorrido es de 466,7 km. La distancia entre Gijón y Barcelona por un recorrido concreto es de 876,3 km. Para recordar fácilmente estas cifras aproximamos la distancia a Madrid por 450 km y la distancia a Barcelona por 900 km. ¿En qué caso cometo más error? ¿Cuál de los dos errores tiene más importancia?

→Madrid:

$E_A = |466{,}7 - 450| = 16{,}7$ *km* $E_R = \frac{16{,}7}{466{,}7} = 0{,}03578\ldots$ *Error por unidad*

→Barcelona

$E_A = |876{,}3 - 900| = 23{,}7$ *km* $E_R = \frac{23{,}7}{876{,}3} = 0{,}0270455\ldots$ *Error por unidad*

A la vista de los cálculos, cometemos más error al aproximar la distancia a Barcelona, por el error absoluto, sin embargo, el error relativo cometido al aproximar la distancia a Madrid es mayor que el de Barcelona, por lo que el error en la aproximación a la distancia de Madrid tiene más importancia.

21. *Realiza en tu cuaderno las operaciones necesarias y copia y rellena esta tabla. (Redondea los siguientes números al orden indicado y calcula los errores absolutos y relativos)*

Número racional	*Redondeo*	*Error Absoluto*	*Error relativo*
4,666666… A las décimas			
$\frac{39}{11}$ *A las centésimas*			
$\frac{2}{5} - \frac{7}{6}$ *A las milésimas*			

22. Utilizando una herramienta de medición A, hemos medido una libélula de 5 cm obteniendo la medición de 4,95 cm. Con otra herramienta de medición B, hemos medido otra libélula de 3 cm obteniendo un valor por exceso de 3,08 cm. Halla los errores absolutos y relativos que se cometen con cada instrumento. ¿Cuál crees que es mejor herramienta?

23. Aproxima cada una de las siguientes cantidades, dando dos cifras significativas, después halla el error cometido en cada caso:
    a) Hay 1 557 estudiantes en un instituto.
    b) Victoria pesa 58,23 kg.

24. Gijón tiene 273.422 habitantes y Oviedo tiene 220.567, indica una aproximación adecuada para transmitir esta información en una conversación informal y calcula cuál de los dos errores cometidos al aproximar tiene más importancia.

3. FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN NÚMERO RACIONAL

La fracción generatriz es la fracción irreducible que representa un número racional.

Las reglas mecánicas que nos permiten encontrar fácilmente la fracción generatriz de un número racional que viene expresado en su forma decimal son las siguientes:

Decimal exacto: Ponemos en el numerador las cifras sin la coma, y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número. Después simplificamos esa fracción todo lo que sea posible.

Ejemplos:

$1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ $\quad 0{,}27 = \frac{27}{100}$ $\quad 3{,}425 = \frac{3425}{1000} = \frac{137}{40}$

$-55{,}3 = \frac{-553}{10}$ $\quad 0{,}05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

Decimal periódico puro: En el numerador ponemos el número con una vez las cifras periódicas y le restamos la parte entera. En el denominador ponemos tantos nueves como cifras tiene el periodo. Después simplificamos esa fracción todo lo que sea posible.

Ejemplos:

$1{,}33333\ldots = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ $\quad 0{,}25252525\ldots\ldots = \frac{25-0}{99} = \frac{25}{99}$

$27{,}5555\ldots = \frac{275-27}{9} = \frac{248}{9}$ $\quad 6{,}327327327327\ldots = \frac{6327-6}{999} = \frac{6321}{999} = \frac{2107}{333}$

$0.010101010\ldots = \frac{1}{99}$ $\quad -0{,}6666\ldots = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$

Decimal periódico mixto: En el numerador ponemos el número con una vez las cifras periódicas y le restamos la parte entera junto con el anteperiodo. En el denominador ponemos tantos nueves como cifras tiene el periodo y después tantos ceros como cifras tiene el anteperiodo
Después simplificamos esa fracción todo lo que sea posible.
(Nota: llamamos anteperiodo a las cifras decimales que no forman parte del periodo)

Ejemplos:

$2{,}433333\ldots = \frac{243-24}{90} = \frac{219}{90} = \frac{73}{30}$ $\quad 0{,}625252525\ldots\ldots = \frac{625-6}{990} = \frac{619}{990}$

$27{,}15555\ldots = \frac{2715-271}{90} = \frac{2444}{90} = \frac{1222}{495}$ $\quad 0{,}0327327327327\ldots = \frac{327-0}{9990} = \frac{327}{9990} = \frac{109}{3330}$

$0.0010101010\ldots = \frac{1}{990}$ $\quad -1{,}16666\ldots = \frac{-(116-11)}{90} = \frac{-105}{90} = \frac{-7}{6}$

25. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales y después comprueba con tu calculadora:

a) 3,55555…… b) 7,2 c) 0,10666666… d) 0.02020202…
e) 0,04 f) 2,5 g) 45,11111…… h) 8,454545…..
i) 0,369369369…… j) 56,478787878….

26. Calcula la fracción generatriz de los números decimales que aparecen y después opera con esas fracciones:

$$0,\hat{3} : 1,2 + 1,\widehat{51} \cdot 1,3\hat{4}$$

27. En primer lugar comienza calculando las fracciones generatrices previamente, después opera con ellas, y redondea el resultado final a dos decimales. En segundo lugar realiza las operaciones redondeando previamente a dos decimales. Al acabar calcula el error cometido en el segundo caso. (Ayúdate de la calculadora).

a) $0,\hat{4} \cdot 344,\hat{4}$ b) $57,896 : 0,\hat{4}$ c) $0,25 - 0,\widehat{25}$

28. OBSERVA EL TRUCO☺ : Si tenemos el decimal 7,444444…. llamémoslo x, y lo multiplicamos por 10, obtenemos 10·x = 74,44444… como ambos números tienen la misma parte decimal, si los restamos, la parte decimal se nos va y obtenemos que **10x - x es 67**, es decir

$9x=67 \rightarrow x=\frac{67}{9}$ ¡Ahí está!

Piensa cuál puede ser el truco para obtener una fracción generatriz del decimal 1,636363….

4. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO Y BASE ENTERA. PROPIEDADES.

Recordamos las potencias de **base entera y exponente entero**:

a base *de la potencia que representa un número natural.*

n exponente *de la potencia que representa un número natural.*

DEFINICIÓN DE POTENCIA CON EXPONENTE POSITIVO	*Ejemplos*
$\boldsymbol{a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot . . . . \cdot a}^{n\ veces}}$ → *multiplicamos a n veces*	$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
$\boldsymbol{(-a)^n = \overbrace{(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdot . . . . \cdot (-a)}^{n\ veces}}$	$(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625$ $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

DEFINICIÓN DE POTENCIA CON EXPONENTE NEGATIVO	*Ejemplos*
$a^{-n}=\frac{1}{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ veces}}$ → *se multiplica en el denominador* $(-a)^{-n}=\frac{1}{\underbrace{(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot\ldots\cdot(-a)}_{n\ veces}}=\frac{1}{(-a)^n}$	$5^{-4}=\frac{1}{5\cdot5\cdot5\cdot5}=\frac{1}{5^4}=\frac{1}{625}$ $(-5)^{-4}=\frac{1}{(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)}=\frac{1}{(-5)^4}=\frac{1}{625}$ $(-5)^{-3}=\frac{1}{(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)}=\frac{1}{(-5)^3}=\frac{1}{-125}=-\frac{1}{125}$

DEFINICIÓN DE POTENCIA CON EXPONENTE 0:	*Ejemplos*
$a^0=1$ $(-a)^0=1$	$9^0=1$ $(-9)^0=1$

NOTAS:	$a^1=a$ $(-a)^1=-a$	$a^{-1}=\frac{1}{a}$ $(-a)^{-1}=-\frac{1}{a}$	*Ejemplos:* $9^1=9$ $\quad 9^{-1}=\frac{1}{9}$ $(-9)^1=-9$ $\quad (-9)^{-1}=-\frac{1}{9}$

ATENCIÓN!!!! El signo del resultado va a depender del signo de la base y de la paridad del exponente, NUNCA del signo del exponente

Base negativa, EXPONENTE PAR → el resultado es POSITIVO

Exponente positivo :	*Exponente negativo:*
$(-3)^4=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=81$	$(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}=\frac{1}{81}$

BASE NEGATIVA, EXPONENTE IMPAR → el resultado es NEGATIVO

Exponente positivo :	*Exponente negativo:*
$(-2)^5=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-32$	$(-2)^{-5}=\frac{1}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}=-\frac{1}{32}$

NOTA: Si suprimimos los paréntesis el significado es distinto, indicamos que la cantidad que va detrás es negativa, veamos:

$-3^4 = -3\cdot3\cdot3\cdot3 = -81$ $\quad$ $-2^5 = -2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = -32$

$-3^{-4} = -\frac{1}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = -\frac{1}{81}$ $\quad$ $-2^{-5} = -\frac{1}{2\cdot2\cdot2\cdot2} = -\frac{1}{32}$

29. *Calcula el valor de las siguientes potencias, indicando los pasos en las potencias de exponente negativo:*

a) 2^{10} b) $(-5)^3$ c) $(-2)^0$ d) $(-1)^{20}$ e) $(-1)^{37}$ f) 4^{-2} g) 10^5

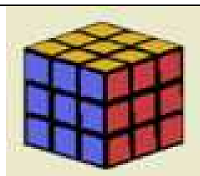
h) $(-1)^{-6}$ i) 10^{-8} j) $(-3)^{-1}$ k) $(-6)^{-3}$ l) $(-10)^{-7}$ m) $(-10)^{-6}$ n) 5^{-1}

30. *Encuentra el valor x desconocido, x puede ser positivo o negativo según el caso o las dos cosas, incluso en algún caso puede tener muchos valores:*

a) $10^x = 1000$ b) $2^x = 32$ c) $3^x = \frac{1}{9}$ d) $2^x = \frac{1}{4}$ e) $(-6)^x = 36$ f) $2^{-5} = x$

g) $x^3 = -1000$ h) $x^4 = 16$ i) $x^{-2} = \frac{1}{25}$ j) $(-3)^x = -3$ k) $(-7)^x = 1$

l) $(-1)^x = 1$ m) $x^0 = 1$ n) $(-1)^x = -1$ o) $7^x = \frac{1}{49}$ p) $(-3)^x = \frac{-1}{27}$



PERO…

¿DÓNDE ESTÁN LAS POTENCIAS?

¿Cuántos cubitos forman el cubo de Rubik?

Veamos algunos casos….

1) Medida de áreas:

Las superficies se miden en unidades cuadradas, es decir 1 m^2 equivale a un cuadrado de 1 m de lado, 1 dm^2 equivale a un cuadrado de 1 dm de lado, etcétera, si tenemos un cuadrado de lado 12 cm, su área equivale a 12^2 cm^2 es decir 144 cm^2.

2) Medida de volúmenes:

Los volúmenes se miden en unidades cúbicas, es decir 1 m^3 equivale a un cubo de arista de 1 m de longitud. El volumen de un cubo de arista 4 dm es 4^3 dm^3 es decir 64 dm^3.

3) Sistemas de numeración:

Los números de nuestro sistema de numeración decimal pueden escribirse utilizando potencias de 10, puesto que los órdenes de unidades van de 10 en 10. Ejemplo:

$$305467 = 7\cdot10^0 + 6\cdot10^1 + 4\cdot10^2 + 5\cdot10^3 + 0\cdot10^4 + 3\cdot10^5$$

Además del sistema de numeración decimal (en base 10, agrupamos de 10 en 10, 10 decenas, 10^2=100 centenas, 10^3=1000 unidades de millar, 10^4=10000 decenas de millar…..), tenemos sistemas de numeración en otras bases, como es en base 2, sistema binario, que el lenguaje básico de los ordenadores, que hace grupos de dos en dos, por lo que sus cifras para representar números solo son el 0 y el 1, puesto que si tuviéramos dos unidades de un orden ya tendríamos una unidad de orden superior. Por ejemplo el número 101011 expresado en el sistema de numeración binario, es en el sistema decimal el siguiente:

$$1\cdot2^0 + 1\cdot2^1 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^4 + 1\cdot2^5 = 1 + 2 + 0 + 8 + 0 + 32 = 43$$

(una unidad, más 1 grupo de dos unidades, más 1 grupo de 2^3= 8 unidades, más 1 grupo de 2^5=32 unidades)
También para los números decimales: $0{,}30546 = 6\cdot10^{-5} + 4\cdot10^{-4} + 5\cdot10^{-3} + 0\cdot10^{-2} + 3\cdot10^{-1}$

4) Escritura de números muy grandes y muy pequeños:

En los ámbitos científicos, se utilizan continuamente cantidades expresadas con la ayuda de las potencias, lógicamente con cantidades aproximadas, veamos algunos ejemplos:

a) La masa de la Tierra es de $6\cdot10^{24}$ kg
b) La distancia media de la Tierra al Sol es de $1{,}5\cdot10^8$
c) La masa de un electrón es de $9\cdot10^{-31}$ kg y la de un protón es aproximadamente $1{,}67\cdot10^{-27}$ kg
d) La velocidad del sonido en el agua es de $1{,}6\cdot10^3$ m/s

5) Actividades económicas:

El interés compuesto de 30000 euros durante 7 años al 5% de interés se calcula como $30000\cdot(1{,}05)^7$

6) Funciones:

El movimiento uniformemente acelerado viene dado por la fórmula: $e = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$
donde “e” es el espacio, “a” la aceleración, “t” el tiempo y “v_0” la velocidad inicial.
Gráficamente es una parábola. Otros tipos de funciones polinómicas de mayor grado se utilizan también para aproximar gráficas o tablas de funciones que relacionan magnitudes entre sí.

7) Descomposición en factores primos:

Ya conocemos de sobra la descomposición en factores de un número ($864=2^5\cdot3^3$) que nos permite estudiar los divisores de un número, así como calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números.

Y MÁS….

Pero SOBRE TODO, para nosotros significan UNA GENIALIDAD MÁS DE LAS MATEMÁTICAS…

¿Por qué escribir 2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2·2 si podemos escribir 2^{14} y decir que significa lo mismo?
¿Por qué operar con todas sus cifras 2^{14} si tenemos que dividirlo entre 2^{12} si podemos saber que es 2^2?
¿Por qué escribir 9500 000 000 000 000 000 si podemos escribir $9{,}5\cdot10^{18}$? Lo veremos más adelante…

PROPIEDADES de las POTENCIAS

Para recordar de manera simple las propiedades, consideraremos que a y b pueden ser negativos o positivos, al igual que los exponentes n y m. Son cinco propiedades:

POTENCIA DE UN PRODUCTO (mismo exponente)	Algunos ejemplos
$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$	$(4\cdot 5)^{-2} = 4^{-2}\cdot 5^{-2}$
	$(-3)^4\cdot(-6)^4=[(-3)\cdot(-6)]^4$
	$[(-2)\cdot(-10)]^{-6} =(-2)^{-6}\cdot(-10)^{-6}$

POTENCIA DE UN COCIENTE (mismo exponente)	Algunos ejemplos	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(20:2)^9 = 20^9: 2^9$	$\left(\frac{35}{5}\right)^{-6} = \frac{35^{-6}}{5^{-6}}$
	$\left(\frac{-36}{18}\right)^4 = \frac{(-36)^4}{18^4}$	$\frac{(-9)^{12}}{(-5)^{12}}=\left(\frac{9}{5}\right)^{12}$
	$\left(\frac{-4}{9}\right)^{-7} = \frac{(-4)^{-7}}{9^{-7}}$	

PRODUCTO DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE	Algunos ejemplos
$a^n\cdot a^m = a^{n+m}$	$5^9\cdot 5^{-6} =5^{9+(-6)}=5^3$
	$(-4)^2\cdot(-4)^3 =(-4)^5$
	$(-15)^{-2}\cdot(-15)^{-4} =(-15)^{-6}$

COCIENTE DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE	Algunos ejemplos	
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$10^6: 10^5=10$	$\frac{3^{-2}}{3^{-30}} =3^{28}$
	$\frac{(-8)^7}{(-8)^5} = (-8)^2$	$\frac{(-9)^{-2}}{(-9)^3}=(-9)^{-5}$
	$\frac{a^{-6}}{a^{-9}} = a^3$	

POTENCIA DE UNA POTENCIA	*Algunos ejemplos*	
$[a^n]^m = a^{n \cdot m}$	$[5^9]^8 = 5^{72}$	$[4^3]^{-5} = 4^{-15}$
	$[(-2)^2]^3 = (-2)^6$	
	$[(-15)^{-2}]^{-1} = (-15)^2$	

31. Utiliza previamente la propiedad <u>potencia de un producto</u> hacia adelante o hacia atrás según corresponda e indica los pasos para calcular el resultado final:

a) $(-5)^{11} \cdot 2^{11} =$ b) $(-2)^3 \cdot (-3)^3 =$ c) $5^4 \cdot (-1)^4 =$ d) $(2 \cdot 10)^5 =$ e) $(-20)^4 \cdot (-5)^4 =$

f) $3^{-2} \cdot 4^{-2} =$ g) $[(-1) \cdot 2]^8 =$ h) $[(-3) \cdot (-10)]^4 =$ i) $(-2)^{-7} \cdot 5^{-7} =$ j) $20^{-3} \cdot 50^{-3} =$

32. Utiliza la previamente la propiedad <u>potencia de un cociente</u> hacia adelante o hacia atrás según corresponda e indica los pasos para calcular el resultado final:

a) $\frac{30^8}{3^8} =$ b) $(-20)^9 : 2^9 =$ c) $\frac{50^4}{(-25)^4} =$ d) $\frac{33^{-4}}{11^{-4}} =$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 =$

f) $\frac{(-20)^6}{(-10)^6} =$ g) $\left(\frac{7}{2}\right)^2 =$ h) $\frac{25^{-1}}{5^{-1}} =$ i) $\left(\frac{1}{4}\right)^0 =$ j) $\frac{45^{-2}}{3^{-2}} =$

33. Utiliza previamente las propiedades <u>producto de potencias de la misma base</u> o <u>cociente de potencias de la misma base</u> e indica los pasos para calcular el resultado final:

a) $2^{14} \cdot 2^{-12} =$ b) $3^{-14} \cdot 3^{12} =$ c) $(-5)^{-1} \cdot (-5)^{-1} =$ d) $(-4) \cdot (-4)^2 =$ e) $(-8)^{-9} \cdot (-8)^9 =$

f) $\frac{10^7}{10^{-3}}$ g) $\frac{6^{-14}}{6^{-13}}$ h) $\frac{(-10)^5}{(-10)}$ i) $(-27)^3 : (-27)^2$ j) $\frac{9^{-4}}{9^{-4}}$

34. Utiliza previamente la propiedad <u>potencia de una potencia</u> y luego calcula indicando todos los pasos, acuérdate de poner primero el signo de igualdad:

a) $(2^3)^4$ b) $[(-7)^2]^{-1}$ c) $[(-1)^7]^{-3}$ d) $[(-6)^{-1}]^{-3}$

b) e) $[10^5]^2$ f) $[(-10)^{-3}]^4$ g) $[(-10)^2]^{-1}$ h) $[3^3]^{-1}$

35. La capacidad de un disco duro externo es de 2 Terabytes. Queremos dedicarlo a ir guardando nuestras fotos, sabiendo que de media, una foto nos ocupa en el disco 2 Megabytes. ¿Cuántas fotos podremos guardar en el disco?

Relaciones de medida:				
$1\ TB = 2^{10}\ GB$	$1\ GB = 2^{10}\ MB$	$1\ MB = 2^{10}\ KB$	$1\ KB = 2^{10}\ B$	$1B = 2^3$ bits

4.1. NOTACIÓN CIENTÍFICA. OPERACIONES

La notación científica normalizada se utiliza para escribir de manera abreviada números muy grandes o muy pequeños, además nos permite comparar de un vistazo cuánto más grandes o más pequeños son unos respecto de otros. Antes de definirlos veamos dos *ejemplos:*

→*Longitud aproximada de un Año luz:* $\boxed{9{,}46 \cdot 10^{12}\ km}$

Eso son 9,46 · 1.000.000.000.000= 9.460.000.000.000 km

→*Longitud aproximada del radio de un átomo de oxígeno:* $\boxed{4{,}8 \cdot 10^{-14}\ km}$

Eso son $4{,}8 \cdot \frac{1}{100\,000\,000\,000\,000} = 0{,}\ 000\ 000\ 000\ 000\ 048\ km$

Si observamos los exponentes, por un lado los positivos nos dan cantidades grandes y lo negativos pequeñas, ambas positivas en este caso.

OPERACIONES EN NOTACIÓN CIENTÍFICA:

Suma y resta: Para poder realizarlas las potencias de 10 deben tener el mismo exponente n, es decir, ser magnitudes del mismo orden.

Multiplicación: Se multiplican las mantisas y se multiplican las potencias de 10.

División: Se dividen las mantisas y se dividen las potencias de 10.

¡OJO! Al final debe comprobarse si el resultado está en notación científica normalizada, si no lo está hay que ponerlo.

En general escribimos:

$$a \cdot 10^{n}$$

a *: número que cumple* $1 \leq |a| < 10$ *se llama* ***mantisa***

n *: número entero que indica el* ***orden de la magnitud***

El exponente n nos ayuda a estimar el tamaño y comparar

Ejemplos: $1{,}23 \cdot 10^{-5}$ $\quad -3{,}4 \cdot 10^{7}$ $\quad 9 \cdot 10^{-4}$ $\quad -5{,}67 \cdot 10^{-9}$ $\quad 10^{12}$

Ejemplo:

La Longitud de la Tierra al Sol se aproxima en unos $1{,}5 \cdot 10^{8}$ *km, bien pues como hemos visto antes, el Año Luz que son* $9{,}46 \cdot 10^{12}$ *km , es más de* 10^{4} *veces más grande, es decir una distancia 10.000 veces más grande.*

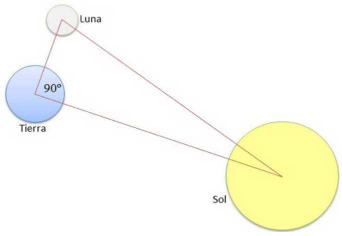
Si queremos concretar un poco más, necesitaremos las operaciones en notación científica, concretamente en el problema anterior tendremos que dividir.

Ejemplos:		
Sumas y restas:	*1)*	$3{,}4\cdot 10^{8} + 1{,}93\cdot 10^{6} = 3{,}4\cdot 10^{8} + 0{,}0193\cdot 10^{8} = 3{,}4193\cdot 10^{8}$
	2)	$2\cdot 10^{-5} + 5{,}87\cdot 10^{-8} = 2\cdot 10^{-5} + 0{,}00587\cdot 10^{-5} = 2{,}00587\cdot 10^{-5}$
	3)	$-4{,}2\cdot 10^{12} + 9{,}93\cdot 10^{11} = -4{,}2\cdot 10^{12} + 0{,}993\cdot 10^{12} = 5{,}73\cdot 10^{12}$
Multiplicaciones:	*1)*	$7{,}4\cdot 10^{9}\cdot 8{,}93\cdot 10^{6} = 66{,}082\cdot 10^{15} = 6{,}6082\cdot 10^{16}$
	2)	$1{,}7\cdot 10^{-13}\cdot 3{,}33\cdot 10^{7} = 5{,}661\cdot 10^{-6}$
Divisiones:	*1)*	$(5{,}15\cdot 10^{14}) : (6{,}3\cdot 10^{5}) \approx 0{,}8175\cdot 10^{9} = 8{,}175\cdot 10^{8}$
	2)	$\frac{6{,}1\cdot 10^{-4}}{8{,}7\cdot 10^{-8}} \approx 0{,}7011\cdot 10^{4} = 7{,}011\cdot 10^{3}$

36. La masa del Sol es, aproximadamente, $3{,}3\cdot 10^{5}$ veces la de la Tierra. Si la masa de la Tierra es $6\cdot 10^{24}$ kg, calcula la masa de Sol.

37. Tal y como se ha comentado en el problema anterior, la Tierra tiene una masa aproximada de $6\cdot 10^{24}$ kg. Sabiendo que su densidad media es $5{,}5\cdot 10^{3}$ kg/m^3, calcula el volumen de la Tierra. Para realizar este problema debes recordar que la densidad media es la razón entre la masa de un cuerpo y el volumen que ocupa: $d = \frac{m}{V}$

38. Si la distancia de la Tierra al Sol es, aproximadamente, $1{,}4\cdot 10^{8}$ km y la distancia de la Tierra a la Luna es $4\cdot 10^{5}$ km, calcula la distancia de la Luna al Sol en el momento que muestra la figura:



39. La masa de un electrón es $9\cdot 10^{-31}$ kg. La masa tanto de un protón como de un neutrón es, aproximadamente, $1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg. Determina la masa de un átomo de azufre sabiendo que tiene 16 electrones, 16 protones y 16 neutrones.

40. La velocidad de la luz es $3\cdot 10^{8}$ m/s . Calcula el tiempo que tardará en recorrer 15 km.

41. Sabemos que la masa de un electrón es $9\cdot 10^{-31}$ kg. Si en un tubo de aceleración alcanza una velocidad de $2\cdot 10^{8}$ m/s ¿qué energía cinética tendrá el electrón dentro de dicho tubo? (En física, la **energía cinética** de un cuerpo es aquella energía que posee debido a su movimiento. Se define como el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa determinada desde el reposo hasta la

velocidad indicada, se calcula con la fórmula $E=\frac{1}{2}mv^2$, m masa, v velocidad, la energía se calcula con kg y m/s, y la unidad de medida son los julios).

42. La velocidad del sonido en el agua es $1{,}6 \cdot 10^3$ m/s. Si un submarinista tarda 0,2 s en detectar un sonido que se produce en la superficie, ¿A qué profundidad se encuentra el submarinista?

43. Realiza con tu calculadora las siguientes operaciones en notación científica, indicando los pasos según la jerarquía:

$$\frac{1{,}6\cdot 10^{-14}-3{,}21\cdot 10^{-12}}{(6{,}4\cdot 10^{9})\cdot(2\cdot 10^{-14})}$$

5. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO Y BASE RACIONAL. PROPIEDADES

*Anteriormente hemos visto potencias donde la **base a** era un número entero, las mismas propiedades que se cumplen para ese tipo de potencias se cumplen para potencias de base a racional, aunque aparentemente la expresiones parezcan más complicadas. En general expresaremos el número racional en su forma fraccionaria.*

Por ejemplo: $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ *sabemos por la propiedad de potencia de un cociente que podemos escribirlo como* $\frac{5^2}{6^2}$ *pero si nos vamos directamente a la definición de potencia podemos expresar* $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}$

Si consideramos $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ *por definición* $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ *que es lo mismo que* $\frac{2^4}{3^4}$.

En el caso de potencias de exponente negativo $\left(\frac{7}{8}\right)^{-4}$ *la definición sería* $\frac{1}{\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8}} = 1:\frac{7^4}{8^4} = \frac{8^4}{7^4} = \left(\frac{8}{7}\right)^4$

Es decir que es más fácil quitar el exponente negativo $\left(\frac{7}{8}\right)^{-4} = \left(\frac{8}{7}\right)^4$.

Por otro lado, imaginemos que tenemos que hacer la operación $\left(\frac{6}{11}\right)^9 : \left(\frac{6}{11}\right)^7$ *podemos utilizar la propiedad de cociente de potencias de la misma base, en este caso la base sería* $\frac{6}{11}$ *entonces:*

$$\left(\frac{6}{11}\right)^9 : \left(\frac{6}{11}\right)^7 = \left(\frac{6}{11}\right)^2$$

Resumamos entonces la definición y las propiedades de las potencias en forma de fracción:

DEFINICIÓN DE POTENCIA

Considerando n natural y a, b números enteros

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b} \qquad \textit{n veces}$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}\cdot\ldots\cdot\frac{b}{a}$ *n veces*			
PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS **Considerando a, b, n y m números enteros**			
$\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$		$\left(\frac{a}{b}\right)^{m}:\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^{n}$		$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}:\left(\frac{c}{d}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^{n}$	
$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]^{m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m}$			
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{1} = \frac{a}{b}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

44. Resuelve las siguientes potencias indicando todos los pasos necesarios:

a) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{7}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3}$ c) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-2}$ $d)$ $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{4}$

b) $\left(\frac{8}{3}\right)^{4}$ g) $\left(\frac{-1}{5}\right)^{-1}$ h) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ i) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}$ j) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

45. Realiza las siguientes operaciones utilizando previamente las propiedades de las potencias de la misma base, después indica todos los pasos necesarios para calcular el resultado:

$a)$ $\left(-\frac{3}{5}\right)^{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-3}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}:\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-11}$ d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

e) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{2}$ f) $\left(\frac{1}{11}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^{4}$ g) $\left(-\frac{10}{17}\right)^{-5}:\left(-\frac{10}{17}\right)^{-4}:\left(-\frac{10}{17}\right)^{-1}$ h) $\left(\frac{2}{21}\right)^{13}\cdot\left(\frac{2}{21}\right)^{-14}\cdot\left(\frac{2}{21}\right)^{3}$

46. Realiza las siguientes operaciones utilizando las propiedades de potencia de un producto, o potencia de un cociente, y transformando previamente los exponentes si fueran opuestos, después calcula indicando todos los pasos:

a) $\left(-\frac{4}{3}\right)^{4}:\left(\frac{2}{5}\right)^{4}$ b) $(35)^{-3}:\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{5}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot(-6)^{-3}$ e) $\left(\frac{5}{8}\right)^{4}\cdot(-8)^{4}$ f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{-3}\cdot 2^{-3}$

g) $4^4 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$ h) $\left(\frac{15}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{6}{4}\right)^{2}$ i) $\left(\frac{1}{20}\right)^{7} : \left(\frac{1}{10}\right)^{7}$

j) $(-7)^{-5} \cdot \left(\frac{-1}{7}\right)^{-5}$ k) $\left(\frac{14}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{3}$

47. Utiliza la propiedad de potencia de una potencia y deja el resultado en forma de una sola potencia:

a) $(4^3)^{-2}$ b) $((-12)^3)^5$ c) $\left(\left(-\frac{5}{8}\right)^{-4}\right)^{6}$ d) $((-1)^5)^7$

e) $\left(\left(-\frac{6}{7}\right)^{0}\right)^{8}$ f) $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\right)^{-3}$ g) $\left(\left(-\frac{5}{3}\right)^{-1}\right)^{-1}$ h) $\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}\right)^{-1}$

6. RAÍCES. RADICALES. RELACIÓN CON POTENCIAS. PROPIEDADES

Un número **b** decimos que es **raíz n-ésima de a** y escribimos $\sqrt[n]{\mathbf{a}}$ si cumple que $b^n = a$.

Por ejemplo: En el conjunto de los números reales:

8 tiene una raíz cúbica: $\sqrt[3]{8}$ *es 2 ,*

16 tiene dos raíces cuartas: $\sqrt[4]{16}$ *puede ser 2 o -2*

-4 no tiene ninguna raíz cuadrada

-125 tiene una raíz cúbica $\sqrt[3]{-125}$ *es -5*

5 tiene dos raíces cuadradas, salvo que no son exactas, escribimos $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$

De manera general:

$\sqrt[n]{a}$ *a se llama radicando, n se llama índice*			
Signo RADICANDO	*Paridad ÍNDICE*	*Número de RAÍCES*	*Pon Ejemplos*
a > 0	*n par*	*Dos raíces reales, con el mismo valor absoluto y signos opuestos*	
	n impar	*Una raíz real*	
a = 0	***No importa***	***Una raíz real que es 0***	
a < 0	*n par*	*No hay valores reales que cumplan $b^n = a$. Ninguna raíz real*	
	n impar	*Una raíz real*	

Cuando trabajamos con expresiones $\sqrt[n]{a}$ es decir que no calculamos la raíz, bien porque no es exacta o bien porque aún no lo sabemos o no nos interesa, decimos que trabajamos con radicales es decir $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ es un ***radical****, dicho radical podemos también escribirlo en forma de potencia usando la expresión $\boldsymbol{a^{\frac{1}{n}}}$, base a y exponente $\frac{1}{n}$.*

$$\boxed{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a^{\frac{1}{n}}}}$$

Esto implica que cuando nos interese podremos usar las propiedades del las potencias.

Ejemplos: $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{30}$

También podemos escribirlos como $\mathbf{7^{\frac{1}{4}}}$ $\mathbf{5^{\frac{1}{2}}}$ $\mathbf{30^{\frac{1}{3}}}$

Propiedades de los radicales	Pon ejemplos
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$ o $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$	

Este curso nos centraremos en las operaciones con raíces cuadradas, de manera que las propiedades anteriores para raíces cuadradas quedan como sigue:

Propiedades de los radicales de índice 2	Pon ejemplos
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	
$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$ o $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	
$\sqrt{a^m} = \left(\sqrt{a}\right)^m = a^{\frac{m}{2}}$	

48. Calcula manualmente el valor o valores de los siguientes radicales si tienen raíces exactas, e indica si no son exactas o no tienen. Comprueba después con tu calculadora:

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt[3]{1000}$ c) $\sqrt[4]{81}$ d) $\sqrt{10}$ e) $\sqrt[6]{1}$

f) $\sqrt{-1}$ g) $\sqrt[5]{-1}$ h) $\sqrt[3]{-27}$ i) $\sqrt[6]{-64}$ j) $\sqrt{1000}$

49. Observa: La radicación es la operación inversa de la potenciación:

$$x^3 = 27 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{27} = 3$$

Averigua entonces, con ayuda de tu calculadora, los siguientes valores de x, si es que es posible:

a) $x^8 = 256$ b) $x^3 = 729$ c) $x^2 = 625$

d) $x^5 = -243$ e) $x^{12} = 4096$ f) $x^6 = -15625$

50. Aplica la propiedades de los radicales para calcular manualmente las siguientes raíces:

a) $\sqrt{20}:\sqrt{5}$ e) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$ f) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$

c) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$ g) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{2^{10}}$ h) $\sqrt{9^2}$

6.1. EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL

Esta sección viene motivada por el deseo de simplificar expresiones y cometer el mínimo error al calcular un valor decimal de las mismas.

Dada la raíz cuadrada de un número por ejemplo $\sqrt{8}$, el resultado no es exacto, pero si factorizamos el radicando, nos queda $\sqrt{2^3}$, a su vez eso podemos escribirlo como $\sqrt{2^2\cdot 2}$ y aplicando las propiedades tendríamos $\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}$ como la expresión $\sqrt{2^2} = 2$, podemos escribir el resultado como $2\cdot\sqrt{2}$. Fijémonos:

$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2\cdot 2} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2}$ *y además omitiremos el signo · y escribiremos* $2\sqrt{2}$

Otro ejemplo:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 3^2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$$

Y otro más largo

$\sqrt{450} = \sqrt{3^2\cdot 5^2\cdot 2} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{2} = 3\cdot 5\cdot\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

Y uno un poco distinto :

$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4}\cdot\sqrt{2} = 2^2\cdot\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

51. Extrae todos los factores posibles de los siguientes radicales:

a) $\sqrt{28}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{72}$ d) $\sqrt{100}$ e) $\sqrt{27}$

f) $\sqrt{675}$ g) $\sqrt{1000}$ h) $\sqrt{600}$ i) $\sqrt{98}$ j) $\sqrt{108}$

6.2. SUMA Y RESTA DE RADICALES. RADICALES SEMEJANTES.

Como hemos visto en la sección anterior, pueden aparecernos radicales precedidos de un número, a ese número lo llamamos **coeficiente del radical**. *Ejemplos:*

Radical	*Coeficiente*
$3\sqrt{7}$	*3*
$2\sqrt{5}$	*2*
$\sqrt{6}$	*1*
$-\sqrt{3}$	*-1*
$\frac{\sqrt{11}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3\sqrt{2}}{5}$	$\frac{3}{2}$

Cuando dos radicales de índice 2 tienen igual radicando se dice que son **radicales semejantes**:

Ejemplos:

$3\sqrt{2}$ *y* $5\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{3}$ *y* $-4\sqrt{3}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ *y* $-\sqrt{7}$

Los radicales semejantes se pueden sumar o restar, es decir, podemos juntarlos sacando factor común, los que no son semejantes no podemos juntarlos. Veamos:

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3+5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$
$$\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (1-4)\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$
$$\frac{\sqrt{7}}{2} - \sqrt{7} = \left(\frac{1}{2}-1\right)\sqrt{7} = -\frac{1}{2}\sqrt{7} = \frac{-\sqrt{7}}{2}$$

$3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ *no podemos juntarlos porque no son semejantes.*

En algunos casos, cuando extraemos factores de las raíces, como en el apartado anterior, podemos encontrar radicales semejantes y entonces juntarlos:

Ejemplos: $\sqrt{18} + 3\sqrt{50} - 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} + 3\sqrt{5^2 \cdot 2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2}$
$= 3\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (3 + 15 - 3)\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

52. Simplifica las siguientes expresiones utilizando la suma de radicales siempre que sea posible:

a) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ $\qquad$ b) $-3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$ $\qquad$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$ $\qquad$ e) $4\sqrt{6} + 5\sqrt{6} - 2\sqrt{9}$

e) $\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{7}$ $\qquad$ f) $\sqrt{8} + \frac{\sqrt{8}}{3} + \frac{2\sqrt{8}}{3}$ $\qquad$ g) $\sqrt{30} - 5\sqrt{30} + 4\sqrt{30}$ $\qquad$ h) $-7\sqrt{10} - \sqrt{10} - \sqrt{10}$

53. Extrae primero los factores que puedas de la raíz y suma en caso de que sea posible:

a) $\sqrt{18} - 3\sqrt{50} + 4\sqrt{8}$ $\qquad$ b) $5\sqrt{12} - 6\sqrt{3} - \sqrt{108}$

c) $\sqrt{7} + 2\sqrt{28} + \sqrt{49}$ $\qquad$ d) $\sqrt{6} - \sqrt{150} + 2\sqrt{12}$

54. Opera con radicales: las dimensiones de un rectángulo son $\sqrt{27}$ cm y $\sqrt{3}$ ¿cuánto vale su área? ¿Y su perímetro?

EJERCICIOS DE REPASO

55. Los siguientes números racionales están expresados en forma de fracción. Escríbelos en forma decimal. Señala además qué tipo de número racional obtienes e cada caso.

a) $\frac{23}{3}$ b) $\frac{-7}{15}$ c) $\frac{24}{6}$ d) $\frac{2}{100}$ e) $\frac{-12}{3}$

56. Utiliza tu calculadora para comprobar de tres maneras distintas si los siguientes pares de fracciones son equivalentes y escribe cada estrategia utilizada:

a) $\frac{9}{20}$ *y* $\frac{-27}{-60}$ b) $-\frac{35}{16}$ *y* $\frac{-5}{2}$

57. Representa gráficamente los siguientes números racionales calculando previamente cuando sea necesario la fracción mixta y después ordénalos de menor a mayor con la notación adecuada:

$$\frac{-1}{5}\ ;\ \frac{9}{4}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{16}{3}\ ;\ -3\ ;\ -\frac{8}{3}\ ;\ 4$$

58. Realiza las siguientes operaciones indicando todos los pasos intermedios:

a) $\frac{3}{2}-\frac{4}{3}-\frac{8}{7}$ b) $\frac{9}{7}\cdot\frac{2}{3}=$ c) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{3}\right)$ d) $\left(\frac{1}{4}-3\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-1\right)$

e) $\frac{25}{4}:5=$ f) $9+2\cdot(\frac{11}{8}-\frac{1}{6})$ g) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{-9}{8}-6}$ h) $\frac{4}{15}:\frac{2}{5}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}-\frac{2}{3}$

59. El coste de un coche se ha abonado en tres plazos. En el primero se han pagado los dos quintos, en el segundo un tercio y en el tercero el resto. ¿Qué fracción del coste se abonó en el tercer plazo?

60. ¿Cuántos litros se tienen si tenemos 60 botellas de $\frac{3}{4}$ de litro?

61. Aproximamos por redondeo $\sqrt{5}$ a las centésimas, y aproximamos $\frac{13}{6}$ también por redondeo a las centésimas, indica matemáticamente cuál es el error cometido en cada caso y que error tendría más importancia.

62. Calcula la fracción generatriz de los números decimales que aparecen y después opera con esas fracciones, ayudándote de la calculadora pero escribiendo todos los pasos:

$1,\hat{3} : 0,2 + 1,\widehat{50} \cdot 0,2\hat{4}$

63. Utiliza previamente las <u>propiedades de las potencias</u> hacia adelante o hacia atrás según corresponda y <u>luego calcula manualmente</u>:

a) $(-2)^3\cdot(-2)^2=$ b) $5^4\cdot5^{-6}=$ c) $(2\cdot10)^5=$ d) $\frac{10^4}{(-5)^4}=$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^5=$ f) $(-5)\cdot(-5)^{-1}=$

g) $[(-1)\cdot2]^8=$ h) $[(-5)\cdot(-10)]^2$ i) $(-2)^{-7}\cdot5^{-7}=$ j) $\frac{20^{-1}}{5^{-1}}=$ k) $\frac{6^{-2}}{2^{-2}}=$ l) $(-8)^{-9}\cdot(-8)^9=$

m) $\frac{(-6)^5}{(-6)}$ n) $[(-7)^2]^{-1}$ ñ) $[(-1)^5]^{-3}$ o) $\frac{9^{-4}}{9^{-4}}$ p) $[(-10)^{-2}]^2$

64. La distancia de Júpiter al Sol es de 7.779.673.000 Km. ¿Es posible compararla, a primera vista, con la distancia de la Tierra al Sol? ¿Cómo la expresarías para que así fuera? ¿Qué cifras te parecen realmente significativas?
Escribe las medidas en notación científica con dos cifras significativas, y opera para averiguar cuántas veces está más lejos Júpiter del Sol, que la Tierra del Sol.

65. Realiza las siguientes operaciones utilizando previamente las propiedades de las potencias, después comprueba con la calculadora:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$ e) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2$ i) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-1} : \left(\frac{8}{9}\right)^{-3}$

b) $\left(\frac{1}{11}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^4$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ j) $(8)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 : \left(-\frac{1}{5}\right)^4$ g) $\left(\frac{5}{8}\right)^3 \cdot 8^3$ k) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 2^{-3}$

d) $\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^0\right)^8$ h) $\left(\left(-\frac{7}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}$ l) $((-1)^5)^7$

66. Calcula manualmente el valor o valores de los siguientes radicales si tienen raíces exactas, e indica si no son exactas o no tienen. Comprueba después con tu calculadora:

a) $\sqrt{36}$ b) $\sqrt[3]{64}$ c) $\sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt{42}$ e) $\sqrt{-4}$ f) $\sqrt[7]{-1}$ g) $\sqrt[3]{-8}$ h) $\sqrt[6]{1}$

67. Aplica la propiedades de los radicales para calcular manualmente las siguientes raíces si es que son exactas:

a) $\sqrt{60} : \sqrt{15}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ c) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ d) $\sqrt{2^8}$

e) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ f) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$ g) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}}$ h) $\sqrt{8^2}$

68. Simplifica las siguientes expresiones utilizando la extracción de factores y la suma de radicales siempre que sea posible:

a) $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - \sqrt{5}$ c) $-3\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$

d) $\sqrt{8} + \frac{\sqrt{8}}{3} + \frac{2\sqrt{8}}{3}$ e) $\sqrt{24} - 3\sqrt{150} + 4\sqrt{36}$ f) $5\sqrt{8} - 6\sqrt{2} - \sqrt{32}$

69. Opera con radicales: la base de un triángulo equilátero mide $\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$ y su altura $\sqrt{150}$ cm ¿cuánto vale su área? ¿Y su perímetro?